Numeriske eksperimenter med Eulers metode

Matematikk 3

Høsten 2004

H.E.K.

Diff.ligning:

$$y'(x) = f(x, y),$$
$$y(x_0) = y_0$$

Eulers metode:

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)\Delta x,$$
$$\Delta x = x_{n+1} - x_n,$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Enkelt MATLAB-program

```
x0 = 0; xmax = 10; % Område for x
%
Deltax = 0.2;        % Steglengde
%
x = x0;  y = .2;     % Startbetingelse
%
Y = y; X = x0;       % X og Y inneholder løsningen så langt
%
while  x <= xmax     % Driv på så lenge som at x  <= xmax
    % Definer funksjonen (høyresiden, f(x,y))
    % inne i parentesen her:
    y = y + Deltax * ( y*(1-y) ); % Eulersteget for y
    x = x + Deltax ;              % Eulersteget for x.
    %
    Y = [Y y];                    % Legger til det nye punktet
    X = [X x];
end
%
plot(X,Y,'-g');      % Tegner ut (bruk kommandoen “hold on”
                     % for å tegne flere kurver i samme plot).
```

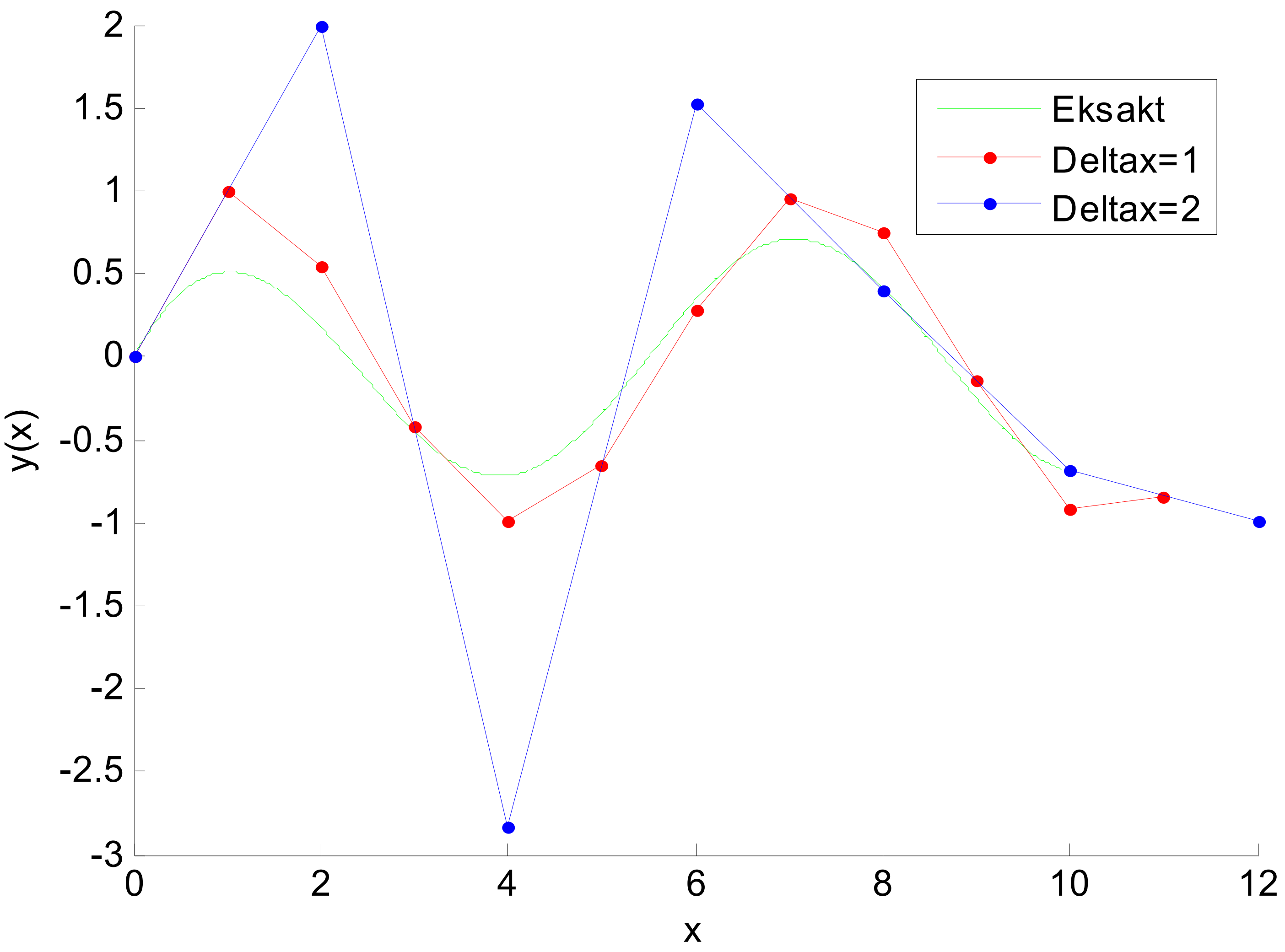
EKSEMPEL 1

$$y'(x) + y(x) = \cos x,$$
$$y(0) = 0.$$

EKSAKT LØSNING:

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{\cos x + \sin x}{2}$$

Eksakt og Euler-approximasjoner



Den logistiske ligningen (Verhulst ligning):

$$y' = y(1-y)$$

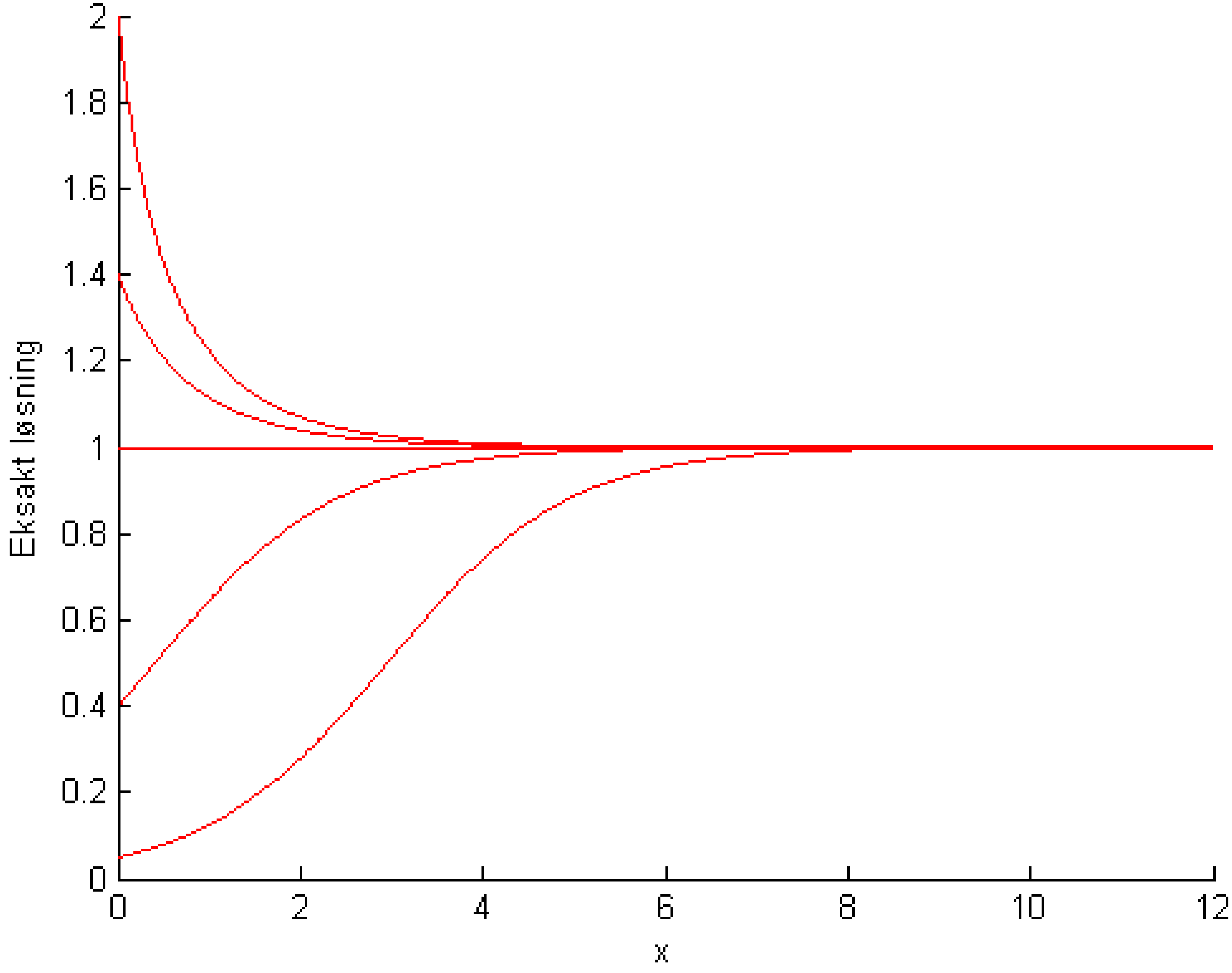
$$y(0) = a$$

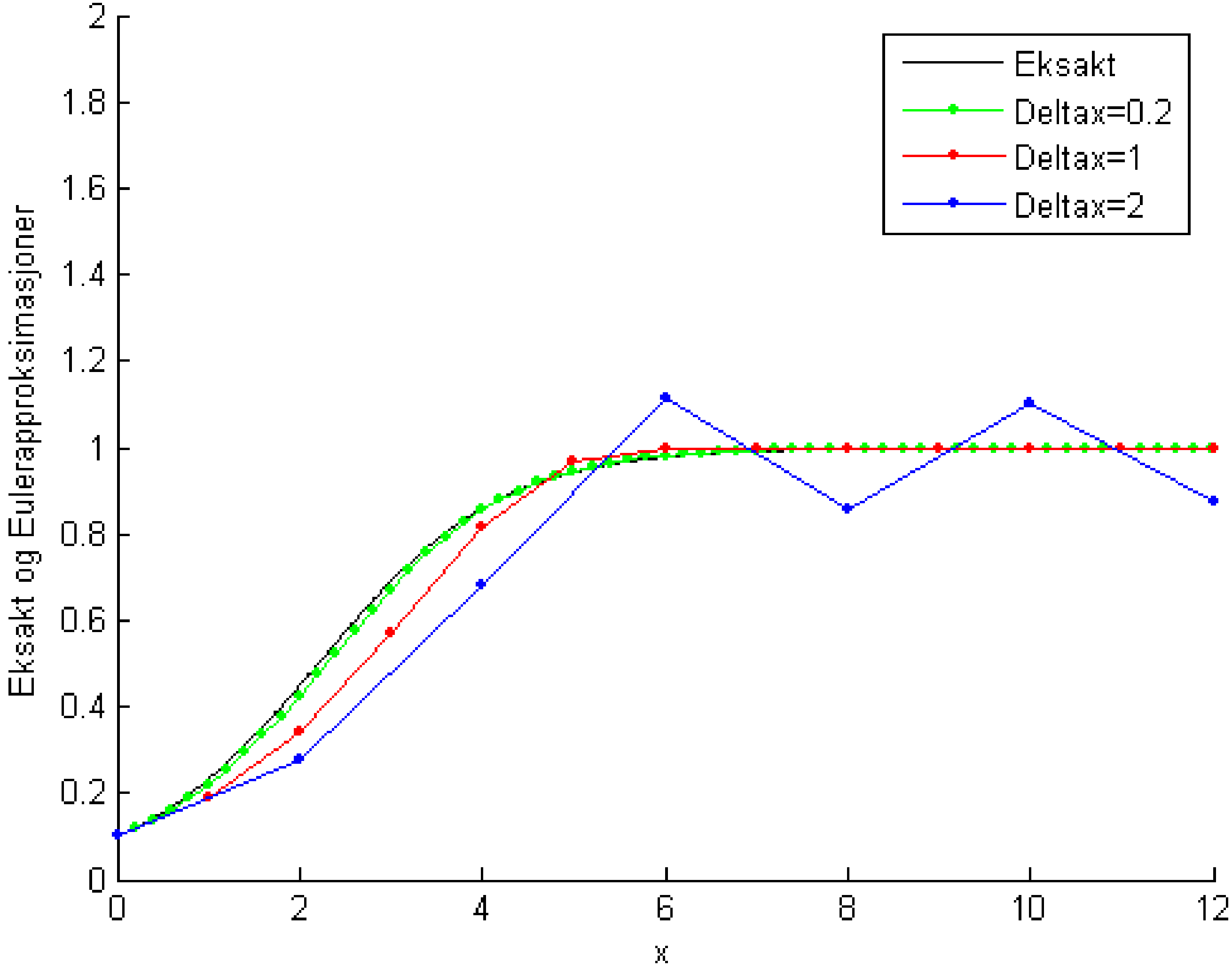
Eksakt løsning (K. s. 35):

$$y(x) = \frac{1}{1+Ae^{-x}},$$

$$A = \frac{1}{a} - 1$$

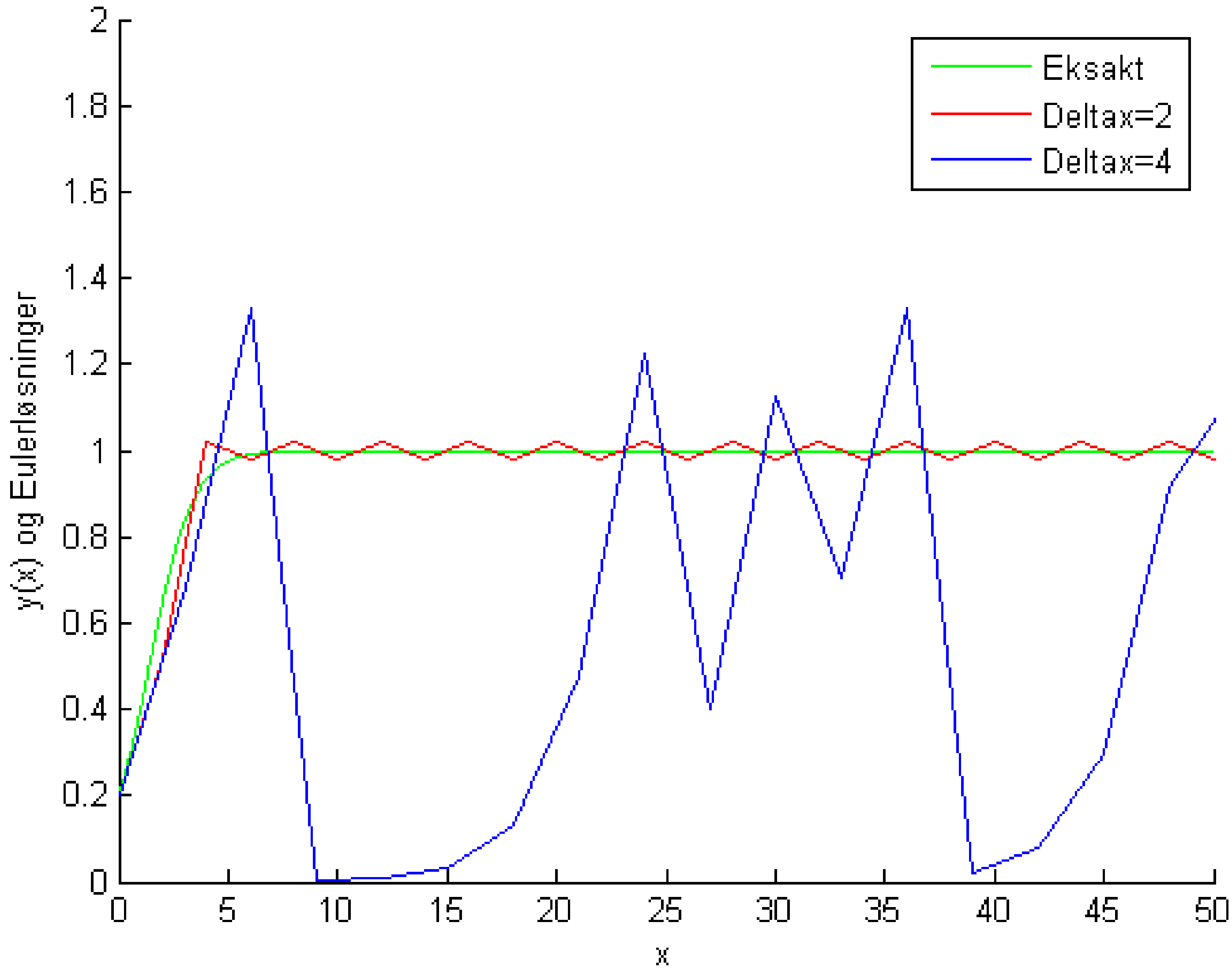
Eksakte løsninger med ulike startbetingelser





Eksakt
Deltax=0.2
Deltax=1
Deltax=2
Eksakt og Eulerapproksimasjoner
x
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
0
2
4
6
8
10
12

KAOTISK LØSNING FOR STORE STEGLENGDER!



FEILANALYSE:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} y''(x_\theta)(x - x_0)^2$$

$$= y_{Euler}(x) + \frac{1}{2} y''(x_\theta)(x - x_0)^2, \; x_0 < x_\theta < x$$

LOKAL FEIL:

$$| y(x_{n+1}) - y(x_n) | = | \frac{1}{2} y''(x_\theta)(\Delta x)^2 |$$

$$=| O(\Delta x)^2, \Delta x = x_{n+1} - x_n$$

GLOBAL FEIL:

$$x - x_0 = N \Delta x,$$

$$| y(x) - y(x_0) | = O\left[N (\Delta x)^2 \right] = O\left[\frac{x - x_0}{\Delta x} (\Delta x)^2 \right] = O(\Delta x)$$