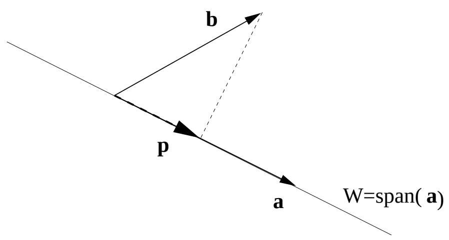
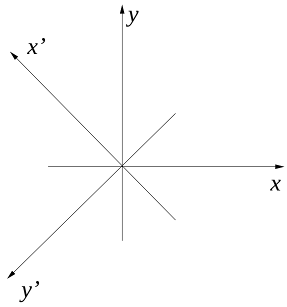
ELAquiz - fasit - Matematikk 3, våren 2005.

1) La $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ slik at } \lvert\mathbf{x}\rvert < 1\}$. Er V et underrom i $\mathbb{R}^2$?	Ja $\boxed{\text{Nei}}$ Umulig å avgjøre
2) Gitt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ der $(b, c) \neq (0, 0)$, dvs. A er ikke en diagonalmatrise. Gjelder $AD = DA$ når $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$?	Ja, alltid $\boxed{\text{Bare hvis } d_1 = d_2}$ Nei, aldri
3) La $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 8 & 6 \\ -2 & 4 & 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$ a) Hvilken av de oppgitte matrisene er radekvivalent med A? b) Hva er rangen til A? c) Hva er dimensjonen til løsningsrommet til ligningssystemet $A\mathbf{x} = 0$?	a) $\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) 1 $\boxed{2}$ 3 4 5 c) 1 2 $\boxed{3}$ 4 5
4) La kolonnene til matrisen A i oppgave 2 være $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_5$. a) En basis for kolonnerommet til A er: b) Løsningsmengden til $A\mathbf{x} = \mathbf{c}_2$ er:	a) $\{\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_5\}$ $\boxed{\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_5\}}$ $(\dim \mathrm{Col}(A) = 2)$ $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_4\}$ $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_5\}$ b) $(0, 1, 0, 0, 0)$ $\boxed{(0, 1, 0, 0, 0) + r(-2, -1, 1, 0, 0) + s(-1, -2, 0, 1, 0) + t(0, -2, 0, 0, 1)}$ Ingen av delene
5) Gitt en $m \times n$-matrise A. Er $\mathrm{Null}(A^\top) = (\mathrm{Col}A)^\perp$?	$\boxed{\text{Ja}}$ Nei Umulig å avgjøre
6) For hvilke $\beta \in \mathbb{R}$ er $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ lineært avhengige? $\mathbf{v}_1 = (\beta\ , -1)$, $\mathbf{v}_2 = (\frac{1}{8}\ , \beta^2)$	$\beta = -1/2$
7) Anta at $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ er to lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^n$. Er (den ortogonale) projeksjonen av $\mathbf{b}$ på $W = \mathrm{Span}\{\mathbf{a}\}$ et skalart multiplum av $\mathbf{a}$? av $\mathbf{b}$? (Tegn figur.)	$\boxed{\text{av } \mathbf{a}}$ av $\mathbf{b}$ Ingen av delene 

Snu!

8) Tegn x'- og y'-aksen for koordinatskiftet:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$



9) Gitt 2×2-matrise $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ der $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ er egenvektorer for A.

a) Hva er de tilhørende egenverdiene?

a) $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$

b) Hva slags kjeglesnitt er $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2y = 1$?

b) Parabel $\boxed{\text{Ellipse}}$ Sirkel Hyperbel

c)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x + y, \quad x(0) = 3 \\ \frac{dy}{dt} &= x + 3y, \quad y(0) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= ? \\ y(t) &= ? \end{aligned}$$

c)

$$x(t) = 2e^{4t} + e^{2t}$$
$$y(t) = 2e^{4t} - e^{2t}$$

d)

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= 3x_n + y_n, \quad x_0 = 3 \\ y_{n+1} &= x_n + 3y_n, \quad y_0 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_n &= ? \\ y_n &= ? \end{aligned}$$

d)

$$x_n = 2 \cdot 4^n + 2^n$$
$$y_n = 2 \cdot 4^n - 2^n$$

10) La A være en $n \times n$-matrise og $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
Vis at dersom $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ og $A^\top \mathbf{y} = 2\mathbf{y}$ så må $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ være ortogonale.

Bevis:

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top \left(\frac{1}{2} A^\top \mathbf{y} \right)$$
$$= \frac{1}{2} (A\mathbf{x})^\top \mathbf{y} = \frac{1}{2} \mathbf{0}^\top \mathbf{y} = 0$$

At vide hvad
man ikke véd
er dog en slags
alvidenhed.

Piet Hein