Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

21. januar 2005

EKSAMENSOPPGAVER FOR TMA4110/TMA4115 MATEMATIKK 3

Oppgave A-1

a) Finn kvadratrøttene til det komplekse tallet $2 + 2\sqrt{3}\,i$.

b) Finn løsningene til ligningen

$$z^2 + 2(1+i)z = 2 + 2(\sqrt{3} - 1)i.$$

Oppgave A-2

a) Finn alle komplekse tall z slik at

$$z^3 = -1 + i,$$

og vis på en figur hvordan de ligger i det komplekse plan.

b) La w være den løsningen fra a) som ligger i annen kvadrant. Finn et positivt helt tall n slik at w^n er reell.

Oppgave A-3
Løs ligningen

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 32 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Tegn røttene i det komplekse plan.

Oppgave A-4

a) Finn alle de komplekse tredjerøttene til $8i$.
Skriv røttene på formen $a + ib$ der $a, b \in \mathbb{R}$.
Tegn røttene i det komplekse plan.

b) Finn en løsning y av differensialligningen

$$xy' + 3y = 3x^{-3/2} \quad (x > 0)$$

slik at $y(1) = 3$.

Oppgave A-5

a) Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$y''' + y' = 4 \cos x.$$

b) Finn alle konstanter k slik at $y = x^k$ er løsning av

$$x^2 y'' + xy' - y = 0, \quad x > 0,$$

og finn den generelle løsningen av differensialligningen.

c) Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$x^2 y'' + xy' - y = -2x^2 e^x, \quad x > 0.$$

d) Bevegelsesligningen for en partikkel med masse $m > 0$ som beveger seg langs x-aksen er gitt ved

$$mx'' + 2x' + x = 0.$$

For hvilke m vil bevegelsen være svingende (dvs. være en underdempet svingning)?

Oppgave A-6
Finn den generelle løsningen av differensialligningene

a) $y'' + y' - 2y = -4x^2$

b) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}, \; x > 0.$

Oppgave A-7

a) Løs differensialligningen

$$xy' + 2y = \cos x, \ x > 0.$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 3, y'(0) = -1.$$

Finn den generelle løsningen av differensialligningene

c) $y'' - 2y' + 5y = 10 \sin x$

d) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}, \ x > 0.$

Oppgave A-8

Bevegelsen til et mekanisk system er gitt ved differensialligningen

$$my'' + ky = \cos \omega t$$

der $m = 2$ og $k = 8$. For hvilke ω vil løsningen $y(t)$ ikke være begrenset når $t \to \infty$?

Oppgave A-9 Gitt differensialligningen

$$(*) \quad y'' - (a+1)y' + ay = e^x$$

der a er et reelt tall.

a) Finn en generell løsning av $(*)$ for alle a.

b) Løs initialverdiproblemet gitt ved $(*)$ og $y(0) = y'(0) = 0$ for $a \neq 1$.

Oppgave A-10
Vis at $y = x^k$ er løsning av differensiallikningen $(*)$ $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$ $(x > 0)$ for passende verdi(er) av k. Hva blir den generelle løsningen av $(*)$?

Oppgave A-11

a) Finn løsningen av differensiallikningen

$$y'' + 4y = \cos x$$

som tilfredsstiller $y(0) = 4/3,\ y'(0) = 4$

b) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen

$$y'' + a^2 y = \cos x$$

for alle reelle tall a.

Oppgave A-12
Finn den generelle løsning av differensialligningene

a) $y' + \frac{1}{x}y = e^{x^2}, \quad x > 0$

b) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$

c) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}, \quad 0 < x < \pi$

Oppgave A-13
Løs initialverdiproblemet

$$y'' + 4y' + 5y = -5x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Oppgave A-14
Finn generell løsning av differensialligningen

$$y'' - (a+b)y' + aby = 0$$

for alle reelle tall a og b. Finn deretter generell løsning av differensialligningen

$$y'' - 2ay' + a^2 y = e^{ax}.$$

Oppgave A-15
Gitt initialverdiproblemet

$$y' = 1 + y\sin x, \quad y(0) = 0.$$

Bruk Eulers metode med skrittlengde 0.1 til å finne en tilnærmet verdi av løsningen for $x = 0.5$. Bruk svaret til å finne en tilnærmet verdi av integralet

$$\int_0^{0.5} e^{\cos t}\, dt.$$

Oppgave A-16
Løs differensialligningen

$$y'' + 9y = \frac{2}{\cos 3x}, \quad -\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}.$$

Oppgave A-17
En deriverbar funksjon f (som ikke er identisk lik null) tilfredsstiller ligningen

$$[f(x)]^2 = e^x \int_0^x f(t)\, dt.$$

Vis at $y = f(x)$ tilfredsstiller differensialligningen

$$(*) \qquad 2yy' = y^2 + e^x y,$$

og finn alle løsninger av $(*)$. Bestem funksjonen f.

Oppgave A-18

a) Finn generell løsning av differensialligningen

$$y\sqrt{x^3+1}\,y' - \frac{3}{4}x^2(y^2+1) = 0, \quad x > -1.$$

Bestem løsningen som oppfyller $y(0) = -1$.

b) Finn generell løsning av differensialligningen

$$y'' - 3y' - 10y = x + e^{-2x}.$$

Oppgave A-19

a) Løs initialverdiproblemet

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

b) Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$y'' - y = x \sin x.$$

Oppgave A-20
Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 2x - 1.$$

Oppgave A-21
Finn den generelle løsningen av differensialligningene:

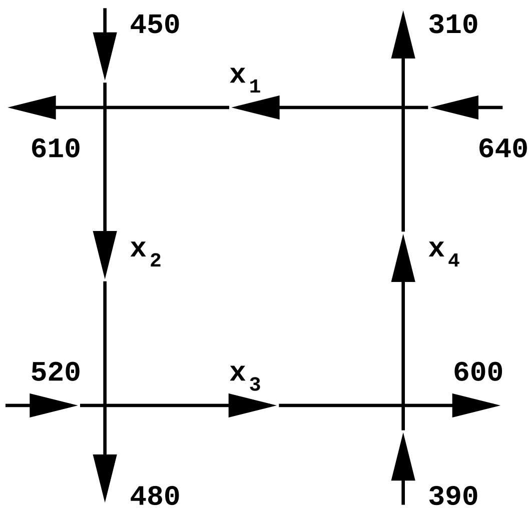
a)

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

b)

$$y'' - 2y' + 2y = 2x + e^x$$

Oppgave A-22
I en by er det fire enveiskjørte gater som krysser hverandre som på figuren.



Figur 1: viser trafikkflyten i oppgave 6

Antall biler som passerer pr. time er angitt på figuren.

Vis at $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tilfredsstiller et ligningssystem på formen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

og løs det. Hva blir x_1, x_2 og x_3 når $x_4 = 200$?

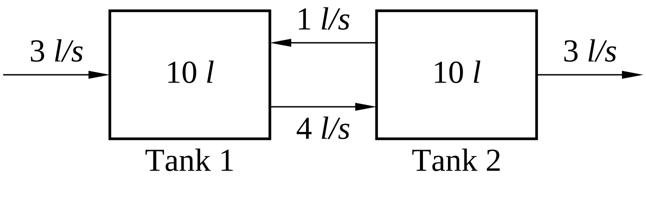
Oppgave A-23
I byen Patos blir hvert år 30% av de gifte kvinnene skilt og 20% av de ugifte blir gift. I byen er det i øyeblikket 8000 gifte kvinner og 2000 ugifte. Anta at det totale kvinneantallet er konstant. Ifølge lokale lover kan en kvinne kun gifte eller skille seg en gang i året.

Vis hvordan antallet gifte og ugifte kvinner etter n år bestemmer antallet av gifte og ugifte kvinner etter $(n+1)$ år. Bruk dette til å regne ut hvor mange gifte og ugifte kvinner det er etter 1, 2 og 3 år.

Oppgave A-24
Finn en 2×2-matrise A slik at differensiallikningssystemet $x' = Ax$ har generell løsning

$$x = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave A-25



De to tankene på figuren inneholder 10 liter hver av en oppløsning av salt i vann. Inn i Tank 1 strømmer det rent vann med en rate av 3 liter pr. sekund. Mellom tankene og ut av Tank 2 strømmer det saltoppløsning som vist på figuren med de ratene som er angitt. I hver tank holdes saltet jevnt fordelt ved omrøring.

Ved tiden $t = 0$ inneholder Tank 1 300 g salt og Tank 2 200 g salt. Finn saltmengdene $x_1(t)$ og $x_2(t)$ i de to tankene for alle $t \geq 0$.

Oppgave A-26

Eksperimenter viser at radioaktive stoffer desintegrerer (spaltes) med en hastighet proporsjonal med mengden stoff som er til stede. Proporsjonalitetsfaktoren kaller vi desintegrasjonskonstanten. Nedenfor ser vi på en kjede av to radioaktive spaltinger.

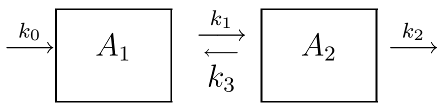
a) Anta at stoffet 1 desintegrerer til stoffet 2 som i sin tur desintegrerer til stoffet 3. Desintegrasjonskonstantene er hhv k_1 og k_2 der $k_1 \neq k_2$. Vis at hvis mengden av de tre stoffene ved tiden $t = 0$ er A_0, B_0 og C_0, så er mengden av stoffet 3 ved tiden $t > 0$ lik

$$C_0 + B_0(1 - e^{-k_2 t}) + A_0 \left(1 - \frac{k_2}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + \frac{k_1}{k_2 - k_1} e^{-k_2 t}\right).$$

b) La nå stoffene 1, 2 og 3 representere hhv uran, thorium og radium. Dersom uran har halveringstid på $2 \cdot 10^5$ år og thorium har halveringstid på $8 \cdot 10^4$ år, hvor mye radium vil vi ha etter 10^6 år hvis vi starter med 100 g uran og ikke noe thorium eller radium?

Oppgave A-27

La A_1 og A_2 være to fylte vannkar hver med konstant volum V som inneholder en saltoppløsning. Mengden salt i A_1 og A_2 ved tidspunktet $t = 0$ er henholdsvis Q_1 og Q_2.
Anta at A_1 tilføres vann med en saltkonsentrasjon $C_0(t)$. La tankene være forbundet som på figuren med rater som angitt.



La $u_1(t)$ og $u_2(t)$ betegne saltinnholdet i karene ved tiden t.

a) Begrunn hvorfor ratene må oppfylle betingelsene

$$k_0 = k_2, \quad k_1 = k_0 + k_3, \quad k_1 = k_2 + k_3$$

og gjør rede for at u_1 og u_2 tilfredsstiller følgende system av differensialligninger

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= -\frac{k_1}{V} u_1 + \frac{k_1 - k_2}{V} u_2 + k_0 C_0(t) \\ \frac{du_2}{dt} &= \frac{k_1}{V} u_1 - \frac{k_1}{V} u_2. \end{aligned}$$

Hva blir initialbetingelsene?

b) Anta først at det tilføres rent vann, og at $k_1 > k_2$. Hva blir løsningen av differensialligningssystemet?

c) La $k_1 = 9, \quad k_2 = 5, \quad k_0 = 28, \quad V = 1, \quad Q_1 = 8, \quad Q_2 = 9$. Anta $C_0(t) = e^{-t}$. Finn løsningen av differensialligningssystemet.

Oppgave A-28

a) Finn den inverse til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

La a være et reelt tall, og la

$$M_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & a & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Drøft hvordan rangen til M_a varierer med a.

c) Drøft dimensjonen til $\mathrm{Col}(M_a)$ og $\mathrm{Null}(M_a)$ for varierende a. For $a = -1$, finn en basis for $\mathrm{Col}(M_a)$ og $\mathrm{Null}(M_a)$.

Oppgave A-29

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) Vis at $[1 \ 1 \ 1]^T$ er en egenvektor for A. Hva er den tilhørende egenverdien? Finn de andre egenverdiene med tilhørende egenvektorer.

b) Finn en ortogonal matrise P slik at $A = PDP^T$ der D er en diagonalmatrise. Angi D.

c) Løs differensialligningssystemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ og finn en løsning med $\mathbf{x}(0) = [3 \ 0 \ 0]^T$.

Oppgave A-30

a) Tegn et endimensjonalt underrom av $\mathbf{R}^2$. Er mengden av vektorer $[x \ y \ z]^T$ i $\mathbf{R^3}$ slik at $3x + 2y + z = 1$ et underrom av $\mathbf{R^3}$?

b) Vis at dersom $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k$ er parvis ortogonale vektorer i $\mathbf{R}^n$, og ingen av dem er nullvektoren, så er $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k$ lineært uavhengige.

Oppgave A-31

La

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) Finn en ortogonal matrise P med $\det(P) = 1$ slik at $D = P^T AP$ blir en diagonalmatrise. Angi D.

b) Ligningen

$$5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 = 8$$

fremstiller et kjeglesnitt. Innfør et nytt, rotert koordinatsystem slik at kjeglesnittet ligger i standard posisjon i forhold til det nye systemet. Tegn kjeglesnittet og de nye aksene i x_1x_2-planet. Hva slags kjeglesnitt har vi?

Oppgave A-32

Gitt matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem en basis for $\mathrm{Row}(A)$ (radrommet til A) og $\mathrm{Col}(A)$ (kolonnerommet til A) ved å bringe A over på echelon form.

b) Finn også en basis for $\mathrm{Null}(A)$ (nullrommet til A).

c) Bestem alle vektorer

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

slik at ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

<u>ikke</u> har løsning.

Oppgave A-33

a) Finn en ortogonal matrise P som diagonaliserer matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix},$$

det vil si at

$$P^T AP = D$$

der D er en diagonal matrise.

Skriv opp D og velg P slik at den representerer en rotasjon i planet.

Et kjeglesnitt er gitt ved ligningen

$$(*) \qquad 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 20x + 15y = 0.$$

b) Innfør et nytt koordinatsystem slik at $(*)$ kommer på enklest mulig (standard) form. Bestem hva slags kjeglesnitt $(*)$ representerer, skisser dette, og tegn også inn aksene i det nye koordinatsystemet.

c) Finn generell løsning til differensialligningssystemet

$$x' = 9x + 12y$$

$$y' = 12x + 16y.$$

Oppgave A-34

Gitt matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 15 & 3 & 18 \\ 0 & -2 & 10 & 2 & 8 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Finn en basis for vektorrommene $\text{Row}(A)$ (radrommet til A) og $\text{Col}(A)$ (kolonnerommet til A) ved å bringe matrisen over på echelon form.

b) Bestem videre en basis for $\text{Null}(A)$ (nullrommet til A.)

c) Bestem uten ny regning en basis for $\text{Null}(A)^\perp$.

d) For hvilke α har ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

løsninger?

Oppgave A-35

Gitt matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut egenverdiene og egenvektorene til A. (Hint: 1 er en egenverdi til A).

b) Bestem en matrise S og en diagonalmatrise D slik at

$$S^{-1}AS = D.$$

c) Kan en i b) finne en matrise S som er ortogonal? I såfall finn en slik.

d) Finn den generelle løsningen av systemet

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

e) Sett

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Regn ut P^{-1}.

f) Finn den generelle løsningen av systemet

$$\begin{array}{ccccccccccc} x' & + & y' & + & z' & = & 4x & + & 4y & + & 4z \\ x' & & & + & z' & = & 3x & + & 2y & + & 3z \\ & & y' & - & z' & = & & & y & - & z \end{array}$$

Oppgave A-36

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Løs ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

ved å bringe totalmatrisen (den augmenterte matrisen) til systemet på redusert echelon form. Bestem også en basis for Null(A).

b) Finn en basis for Row$(A)^{\perp}$ og Col(A).

Oppgave A-37

Et kjeglesnitt er gitt ved ligningen

$$(*) \qquad 8x_1^2 + 12x_1x_2 + 17x_2^2 = 80.$$

Innfør et nytt, rotert koordinatsystem slik at $(*)$ kommer på enklest mulig (standard) form. Bestem hva slags kjeglesnitt $(*)$ representerer, skisser dette i x_1x_2-planet, og tegn også inn aksene i det nye koordinatsystemet.

Oppgave A-38

La V være underrommet i $\mathbf{R}^4$ gitt ved

$$V = \text{span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

a) Finn en basis for $V^{\perp}$.

b) Finn en 3×4 -matrise A slik at $V = \text{Null}(A)$.

Oppgave A-39
Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -8 & -13 & 7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

og likningssystemet

$$(*) \qquad Ax = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

der a, b og c er reelle konstanter.

a) Avgjør for hvilke a, b, c likningssystemet $(*)$ har løsning.

b) Løs $(*)$ når $a = -4$, $b = 2$ og $c = 3$. Finn en basis for $\mathrm{Null}(A)$ (nullrommet til A).

c) Finn en basis for $\mathrm{Row}(A)$ (radrommet til A) og finn en basis for $\mathrm{Col}(A)$ (kolonne-/søylerommet) til A.

d) Finn en basis for $\mathrm{Col}(A)^\perp$. Bruk for eksempel resultatet fra **a)**.

Oppgave A-40

a) Bruk Gram-Schmidts ortogonaliseringsalgoritme til å finne en ortogonal basis for underrommet $V \subseteq \mathbb{R}^4$ utspent av vektorene

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

b) Finn (den ortogonale) projeksjonen av $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$ ned på underrommet V.

Oppgave A-41 La α være et reelt tall og sett

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

a) For hvilke verdier av α har ligningssystemet

$$Ax = \begin{bmatrix} \alpha + 1 \\ -\alpha \\ 1 \end{bmatrix}$$

1) nøyaktig én løsning?
2) uendelig mange løsninger?
3) ingen løsninger?

b) Løs ligningssystemet i tilfellet 2) i a).

I resten av oppgaven settes $\alpha = 2$ slik at

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

c) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

d) Finn en ortogonal matrise P slik at

$$P^{-1}AP = D$$

der D er diagonal. Hva blir D?

e) La den kvadratiske formen $Q(x)$ være gitt ved

$$Q(x) = x^T Ax$$

der $x \in \mathbb{R}^3$. Vis at $Q(x) \geq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}^3$.

f) Løs differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 - y_3 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 - y_3 \\ y_3' &= -y_1 - y_2 + 2y_3 \end{aligned} \quad .$$

Oppgave A-42 La A være en $n \times n$-matrise som oppfyller matriseligningen $A^2 = 2A - I$ (I betegner identitetsmatrisen). Vis at dersom A er diagonaliserbar, så er $A = I$.

Oppgave A-43
Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \text{ og vektoren } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1+\alpha \\ \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

a) Bestem rangen til A for alle reelle tall α.

b) For hvilke verdier av α er A invertibel? Finn A^{-1} når $\alpha = 0$.

c) For hvilke verdier av α har likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nøyaktig en løsning, mer enn en løsning, ingen løsning? Løs likningssystemet når $\alpha = 0$.

Oppgave A-44
Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Vis at A har egenverdier 0, 1 og 6.

b) Det oppgis at $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ er egenvektorer svarende til egenverdiene 0 og 1. Finn en egenvektor svarende til egenverdien 6.

c) Bestem en 3×3-matrise K slik at

i) $K^{-1}AK$ er en diagonal matrise

ii) $K^{-1} = K^T$

d) Den kvadratiske formen

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$$

kan skrives som

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Innfør et nytt koordinatsystem slik at

$$f(\mathbf{x}) = ay_1^2 + by_2^2 + cy_3^2$$

der y_1, y_2, y_3 er koordinatene til $\mathbf{x}$ i det nye koordinatsystemet.

Hva blir a, b, og c?

Oppgave A-45

a) La $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

Finn en ortogonal matrise P med determinant lik 1 slik at $P^T AP$ blir en diagonalmatrise.

b) Ligningen $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 2 = 0$ framstiller et kjeglesnitt K. Innfør et nytt rotert koordinatsystem slik at ligningen til K får enklest mulig form. Tegn K og de nye koordinataksene i xy-planet.

Oppgave A-46
La vektorrommet $V \subset \mathbf{R}^4$ være mengden av løsninger til ligningen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

Finn en basis for V og bestem dimensjonen.

Oppgave A-47
Vis at ligningssystemet

$$\begin{aligned} 5x - y + z &= 1 \\ -2x + y - \tfrac{1}{2}z &= -a \\ 9x + 3y + z &= 2a \end{aligned}$$

har løsning for nøyaktig én verdi av a. Løs systemet for denne verdien av a.

Oppgave A-48
La A være en invertibel matrise med egenverdi $\lambda \neq 0$ og tilhørende egenvektor v. Vis at da er v også en egenvektor for A^{-1}. Hva er den tilhørende egenverdien?

Oppgave A-49
En reell $n \times n$-matrise har egenskapen

$$A^2 = A.$$

Vis at determinanten til A er 0 eller 1. Vis at hvis $\det(A) = 1$, så er $A = I$ (identitetsmatrisen). Må A være nullmatrisen hvis $\det(A) = 0$? Begrunn svaret.

Oppgave A-50
La $\vec{x}, \vec{y}$ og $\vec{z}$ være lineært uavhengige vektorer i et vektorrom V. Vis at vektorene $\vec{u}, \vec{v}$ og $\vec{w}$, der $\vec{u} = \vec{x}, \vec{v} = \vec{x} + \vec{y}$ og $\vec{w} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ er lineært uavhengige.

Oppgave A-51
La A være en kvadratisk matrise som oppfyller betingelsen:

$$A^2 - 3A + 2I = 0,$$

hvor I er identitetsmatrisen og 0 er nullmatrisen. Begrunn at A da er invertibel, og finn A^{-1} uttrykt ved A og I.

Fasit

A-1 **a)** $\pm(\sqrt{3}+i)$
b) $\sqrt{3}-1, \qquad -(1+\sqrt{3})-2i$

A-2 **a)** $z_0 = \sqrt[6]{2}\, e^{\pi i/4}; \quad z_1 = \sqrt[6]{2}\, e^{11\pi i/12}; \quad z_2 = \sqrt[6]{2}\, e^{19\pi i/12}$
b) $n = 12$

A-3 $\lambda_k = 2e^{i(\pi/5+2k\pi/5)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$

A-4 **a)** $\pm\sqrt{3}+i; \quad -2i$
b) $y = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{2}{x^{3/2}}$

A-5 **a)** $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x - 2x \cos x$
b) $k = \pm 1; \qquad y = c_1 x + \dfrac{c_2}{x}, \quad x > 0$
c) $y = c_1 x + \dfrac{c_2}{x} + \left(\dfrac{2}{x} - 2\right) e^x, \qquad x > 0$
d) $m > 1$

A-6 **a)** $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + 3 + 2x + 2x^2$
b) $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + x e^x \ln x$

A-7 **a)** $y = \dfrac{\cos x + x \sin x + C}{x^2}, \quad x > 0$
b) $y = 3e^x \cos 2x - 2e^x \sin 2x$
c) $y = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x + \cos x + 2 \sin x$
d) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \ln x, \quad x > 0$

A-8 $\omega = \pm 2$

A-9 **a)** $y = \begin{cases} c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x, & a = 1 \\ c_1e^x + c_2e^{ax} + \frac{1}{1-a}xe^x, & a \neq 1 \end{cases}$

b) $y = \dfrac{1}{(1-a)^2}(e^{ax} - e^x) + \dfrac{1}{(1-a)}xe^x$

A-10 $y = C_1x + C_2x^3$

A-11 **a)** $y = \cos 2x + 2\sin 2x + \dfrac{1}{3}\cos x$

b) $a = 0: \quad y = C_1x + C_2 - \cos x$

$a = \pm 1: \quad y = C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{1}{2}x\sin x$

$a \notin \{0, \pm 1\}: \quad y = C_1\cos ax + C_2\sin ax + \dfrac{1}{a^2-1}\cos x$

A-12 **a)** $\dfrac{C}{x} + \dfrac{1}{2x}e^{x^2}$

b) $C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + \dfrac{1}{2}x^2e^{-2x}$

c) $C_1\sin x + C_2\cos x + \sin x\ln(\sin x) - x\cos x$

A-13 $C_1e^{-2x}\cos x + C_2e^{-2x}\sin x - x + \dfrac{4}{5}$

A-14 $C_1e^{ax} + C_2e^{bx}$ når $a \neq b$

$C_1e^{ax} + C_2xe^{ax}$ når $a = b$

$C_1e^{ax} + C_2xe^{ax} + \frac{1}{2}x^2e^{ax}$

A-15 0.53; 1.27

A-16 $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \dfrac{2}{9}\ln(\cos 3x)\cdot\cos 3x + \dfrac{2}{3}x\sin 3x$

A-17 $y = e^x + Ce^{x/2}, \quad f(x) = e^x - e^{x/2}$

A-18 **a)** $y^2 = -1 + Ce^{\sqrt{1+x^3}}, \quad y = -\sqrt{-1 + 2e^{\sqrt{1+x^3}-1}}$

b) $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x} + \frac{3}{100} - \frac{1}{10}x - \frac{1}{7}xe^{-2x}$

A-19 **a)** $e^x - e^{-x}$

b) $C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}(\cos x + x \sin x)$

A-20 $y = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x + x^2 - 2x + 1$

A-21 **a)** $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

b) $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1) + 1 + x$

A-22

$$\begin{array}{lll} x_1 = 330 + t & \text{Når } x_4 = 200, \text{ er} & x_1 = 530 \\ x_2 = 170 + t & & x_2 = 370 \\ x_3 = 210 + t & & x_3 = 410 \\ x_4 = t & & x_4 = 200 \end{array}$$

A-23 $\begin{bmatrix} G_{n+1} \\ U_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_n \\ U_n \end{bmatrix}$;

n	0	1	2	3
G_n	8000	6000	5000	4500
U_n	2000	4000	5000	5500

A-24 $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

A-25 $x_1(t) = 100e^{-3t/5} + 200e^{-t/5}$

$x_2(t) = -200e^{-3t/5} + 400e^{-t/5}$

A-26 **b)** 94.8 g

A-27 **a)** $u_1(0) = Q_1, \quad u_2(0) = Q_2$

b) $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} k_1 - k_2 \\ \sqrt{k_1(k_1 - k_2)} \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{bmatrix} k_1 - k_2 \\ -\sqrt{k_1(k_1 - k_2)} \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}$ der

$$\lambda_1 = \frac{-k_1 + \sqrt{k_1(k_1 - k_2)}}{V}, \ \lambda_2 = \frac{-k_1 - \sqrt{k_1(k_1 - k_2)}}{V} \text{ og}$$

$$c_1 = \frac{Q_1}{2(k_1 - k_2)} + \frac{Q_2}{2\sqrt{k_1(k_1 - k_2)}}, \ c_2 = \frac{Q_1}{2(k_1 - k_2)} - \frac{Q_2}{2\sqrt{k_1(k_1 - k_2)}}$$

c) $u_1(t) = 8e^{-t}, \quad u_2(t) = 9e^{-t}$

A-28 **a)** $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\text{Rang}(M_a) = \begin{cases} 1 & \text{for } a = 1 \\ 2 & \text{for } a = -1 \\ 3 & \text{for } a \neq \pm 1 \end{cases}$

c) $\text{Dim Col}(M_a) = \begin{cases} 1 & \text{for } a = 1 \\ 2 & \text{for } a = -1 \\ 3 & \text{for } a \neq \pm 1 \end{cases}$ $\quad$ $\text{Dim Null}(M_a) = \begin{cases} 3 & \text{for } a = 1 \\ 2 & \text{for } a = -1 \\ 1 & \text{for } a \neq \pm 1 \end{cases}$

$a = -1:$

Basis for $\text{Col}(M_a) : \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ der $\mathbf{u_1} = [1, 1, -1]^T, \mathbf{u_2} = [1, -1, 1]^T$ f.eks.

Basis for $\text{Null}(M_a) : \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ der $\mathbf{v_1} = [0, 1, 1, 0]^T, \mathbf{v_2} = [1, 0, 0, 1]^T$ f.eks.

A-29 **a)** $\lambda_1 = 9$ med oppgitt egenvektor $\mathbf{k}_1 = [1, 1, 1]^T$;

$\lambda_{2,3} = 3$ med egenvektorer: $r\mathbf{k}_2 + s\mathbf{k}_3$ der $\mathbf{k}_2 = [-1, 1, 0]^T$,
$\mathbf{k}_3 = [-1, 0, 1]^T, (r, s) \neq (0, 0)$

b) $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ $D = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{x} = c_1\mathbf{k}_1 e^{9t} + c_2\mathbf{k}_2 e^{3t} + c_3\mathbf{k}_3 e^{3t}$

$\mathbf{x}(0) = [3, 0, 0]^T$ hvis $c_1 = 1,\ c_2 = c_3 = -1$

A-30 **a)** Nei

A-31 **a)** $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};$ $\quad$ $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

b) Ellipse

A-32 **a)** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f.eks)

Basis radrom A: $(1, 3, 1, 2)$, $(0, 0, 1, 1)$ (f.eks)

Basis søylerom A: $\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}$ (f.eks)

b) Basis for Null(A): $\begin{bmatrix}1\\0\\1\\-1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}3\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$ (f.eks.)

c) $5a - 2b + c \neq 0$

A-33 **a)** $D = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 25\end{bmatrix}$, $\quad P = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & 3\\-3 & 4\end{bmatrix}$ (f.eks.)

b) Parabel

c) $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix} + c_2e^{25t}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$

A-34 **a)** Basis Row(A): $[1\ \ 0\ \ 10\ \ 2\ \ 0]^T,\ [0\ \ 1\ \ -5\ \ -1\ \ 10]^T,\ [0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]^T$ (f.eks.)

Basis Col(A): $[1\ \ -2\ \ 0\ \ 0\ \ 3]^T,\ [2\ \ -5\ \ -3\ \ -2\ \ 6]^T,\ [2\ \ 6\ \ 18\ \ 8\ \ 6]^T$ (f.eks)

b) Basis Null(A): $[-10\ \ 5\ \ 1\ \ 0\ \ 0]^T,\ [-2\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0]^T$ (f.eks)

c) $\text{Null}(A)^\perp = \text{Row}(A)$

d) Løsning kun for $\alpha = 3$

A-35 **a)** $\lambda = 1$, $\mathbf{v} = a\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$, $(a,b) \neq (0,0)$; $\lambda = 4$, $\mathbf{v} = c\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $c \neq 0$

b) $S = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}$ (f.eks); $D = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$

c) $S = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\-\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\0 & -2 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$ (f.eks)

d) $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = c_1e^t\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} + c_2e^t\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} + c_3e^{4t}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

e) $P^{-1} = \begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\1 & -1 & 0\\1 & -1 & -1\end{bmatrix}$

f) Som 3 d)

A-36 **a)** $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad s, t \in \mathbb{R}$

Basis for Null(A): $[2, 1, 0, 0, 0]^T$, $[-1, 0, 1, 1, 0]^T$ (f.eks.)

b) Basis for Row$(A)^\perp$: $[2, 1, 0, 0, 0]^T$, $[-1, 0, 1, 1, 0]^T$ (f.eks.)

Basis for Col$(A)^\perp$: $[1, 2, 1, 2]^T$, $[2, 1, 5, 3]^T$, $[2, 3, 4, -1]^T$ (f.eks.)

A-37 Ellipse

A-38 **a)** Basis for $V^\perp$: $[-1, 0, 1, 0]^T$, $[0, -1, 0, 1]^T$ (f.eks.)

b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f.eks.)

A-39 **a)** $a - b + 2c = 0$

b) $x = r \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Basis for Null(A): $[2, 1, 0, 0, 0]^T$, $[1, 0, -2, 1, 0]^T$, $[-3, 0, 2, 0, 1]^T$ (f.eks)

c) Basis for Row(A): $[1, -2, 2, 3, -1]^T$, $[0, 0, 1, 2, -2]^T$ (f.eks.)

Basis for Col(A): $[-3, 1, 2]^T$, $[-8, 2, 5]^T$ (f.eks.)

e) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (f.eks)

A-40 **a)** $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ (f.eks.)

b) $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

A-41 **a)** 1) $\alpha \notin \{1, -2\}$
2) $\alpha = -2$
3) $\alpha = 1$

b) $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$

c) $\lambda_1 = 1, \quad \text{egenvektorer} \quad r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (r, s) \neq (0, 0)$

$\lambda_4 = 1, \quad \text{egenvektorer} \quad r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r \neq 0$

d) $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (f.eks)

f) $y = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c_i \in \mathbf{R}$

A-43 **a)** $\alpha \neq \pm 1 :$ rang $A = 4$
$\alpha = \pm 1 :$ rang $A = 3$

b) $\alpha \neq \pm 1 : \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\alpha \neq \pm 1 :$ nøyaktig en løsning
$\alpha = 1 :$ mer enn en løsning
$\alpha = -1 :$ ingen løsning
$\mathbf{x} = [0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0]^T$

A-44 **b)** $[2 \quad 5 \quad 1]^T$

c) $K = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{6} & 0 & 5/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \end{bmatrix}$

d) a, b, c blir egenverdiene fra a).

A-45 **a)** F.eks. $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $4(x')^2 + (y')^2 = 1$

A-46 Basis f.eks. $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim V = 3$

A-47 $a = \frac{1}{2}; \quad x = \frac{1}{6}(1-t),\ y = \frac{1}{6}(t-1),\ z = t,\ t \in \mathbf{R}$

A-48 λ^{-1}

A-51 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{3}{2}\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{A}$