

(1) HOMOGEN

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

(2) IKKE-HOMOGEN

$$= r(x)$$

$p, q, r$  kontinuerlige på  $I$

TEORI

① Eksistens og entydighets-teorem:

(1) med startbetingelser

$$\begin{cases} y(x_0) = k_0 \\ y'(x_0) = k_1 \end{cases}, x_0 \in I :$$

Har unik løsning  $y(x)$  på  $I$ .

— " —  
for (2)

② Generell løsning

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$y_1(x), y_2(x)$  basis av løsninger

Generell løsning:

$$y = y_h + y_p$$

— en partikulær løsn.

METODE

③ (a)  $y'' + ay' + by = 0$

$a, b$  konstanter

Finne  $y_p$ :

(i)  $r(x)$  på form som i tabell (kap. 2.9), finn  $y_p$  evt. med modifikasjon

(b)  $x^2 y'' + ax y' + by = 0$

Euler-Cauchy

(ii) Hvis  $r(x)$  på annen form enn i tabell for konstant koeff. lign (3(a)), eller:

(c) Gitt en løsn.  $y_1$ ,

finn  $y_2 = u(x)y_1$ ,

(reduksjon av orden)

generelt for (3)(b)(c):

Variasjon av parameter:

$$y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2$$

(Kap. 2.10)

# Svingninger (2.5, 2.11)

## A) Frie svingninger

$$(1) \quad y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

HOMOGEN

(i) Ingen demping,  $c=0$ :

$$(i) \quad y'' + \frac{k}{m}y = 0$$

•  $y_h = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$   
 (svingning, utslag begrenset  $\leq \sqrt{A^2 + B^2}$ )

(ii) Med demping,  $c > 0$

• Tre typer røtter  $\rightarrow y_h$  type (I) - (III)

(over-/kritisk/underdemping) (I) (II) (III) (-alle med en eksponensiell del som gir at  $y_h \rightarrow 0$  når  $t \rightarrow \infty$ )

## B) SVINGNINGER + EKSTERN KRAFT

$$(2) \quad y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

IKKE-HOMOGEN

Periodisk kraft =  $F_0 \cdot \cos(\omega t)$

① Ingen demping,  $c=0$ :

$y_h$  som i A (i)

(i)  $\omega_0 \neq \pm \omega$ : •  $y_p = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ ,  
 begrenset svingning, annen frekvens.  
 ( $F_0/m \cdot \cos(\omega t)$  ikke homogen løsning)

(ii)  $\omega_0 = \pm \omega$ : **RESONANS**:  $\frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$  er homogen-  
 løsning, må modifisere:

•  $y_p = t(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) \rightarrow \infty$   
 når  $t \rightarrow \infty$ : Ubegrenset!

② Med demping,  $c > 0$ :

$y_h$  som i A (ii)

$F_0/m \cdot \cos(\omega t)$  aldri homogen-løsning,  
 •  $y_p = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$  og  
 $y_h \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ .

$y_p$ : Kan dra øfte størrelse på utslag  $\leq \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  
 begrenset, men kan bli store for liten  $c$ , f.eks.