A $(m \times n)$ - matrise

$\boxed{\text{Radrommet}}$ til A $= \mathrm{Row}(A) =$ underrom $\subseteq \mathbb{R}^n$ som spennes ut av radene i A.

$\boxed{\text{Kolonnerommet}}$ til A $= \mathrm{Col}(A) =$ underrom $\subseteq \mathbb{R}^m$ som spennes ut av kolonnene i A

$\boxed{\text{Nullrommet}}$ til A $= \mathrm{Null}(A) =$ alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ som løser $\boxed{A\underline{x} = \underline{0}}$

$=$ løsn. rommet til

$\boxed{\text{DIMENSJONER:}}$

$$\underset{\left(\text{rangen til } A\right)}{\overset{\shortparallel}{\mathrm{rank}(A)}} = \dim(\mathrm{Row}(A)) = \dim(\mathrm{Col}\,A)$$

og: $\boxed{\mathrm{rank}\,A + \dim \mathrm{Null}(A) = n}$

$\boxed{\text{NB:}}$ $\left[\ \underline{x} \text{ løser } A\underline{x} = \underline{0} \iff \underline{x}\ \boxed{\text{ortogonal}} \text{ til alle rader i } A\ \right]$

$(\text{rad} \cdot \underline{x} = 0)$

så: $\boxed{(\mathrm{Row}\,A)^{\perp} = \mathrm{Null}\,A}$

Finne basiser:

$$A \xrightarrow{\text{Gauss}} R$$

redusert form

- rader i R som ikke er nullrader = basis for Row A
- kolonner i A som svarer til kolonner i R m/ledende tall/enere er basis for Col A.
- Ligningen $A\underline{x} = \underline{0}$ redusert til $R\underline{x} = \underline{0}$, generell løsning:

$$\underline{x} = t_1 \underline{v}_1 + \dots + t_k \underline{v}_k$$

$\Rightarrow$ basis $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots \underline{v}_k\}$ for Null A

$\boxed{\text{Anvendelse:}}$

Dersom du vil finne basis for $V = \text{Span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_s\}$ kan du sette vektorene $\underline{v}_1, \dots \underline{v}_s$ som rader (evt. kolonner) i en matrise A og finne basis for Row A (evt Col A) siden V da er lik Row A (henholdsvis Col A)

NB: Da er basis for Null A = basis for $V^{\perp}$

Generell løsning for system $\boxed{A\underline{x} = \underline{b}}$.

er på formen: $\boxed{\underline{x} = \underline{x}_h + \underline{x}_p}$

der $\underline{x}_h = t_1 \underline{v}_1 + \dots + t_k \underline{v}_k$ gen. løsn. av $A\underline{x} = \underline{0}$

og $\underline{x}_p$ ēn partikulærløsning av $A\underline{x} = \underline{b}$.

Kvadratiske matriser:

A $(n \times n)$ - matrise:

Da er følgende ekvivalent:

(1) A er invertibel

(2) $A\underline{x} = \underline{b}$ har unik løsning (nemlig $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$)
for enhver $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$

(3) Radene i A er lineært uavhengige

(4) Kolonnene i A —"— ————

(5) $\det A \neq 0$

(6) $A\underline{x} = \underline{0}$ har kun triviell løsning $\underline{x} = \underline{0}$

Finne A^{-1}:

Enten: $[A \ I] \xrightarrow[\text{Gauss-Jordan}]{} [I \ A^{-1}]$

Eller: Ved formel m/adj. matrise/kofaktorer.

2x2-matrise $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Egenvektorer og -verdier

Teorem [$n \times n$-matrise A diagonaliserbar $\iff$ A har n lineært uavhengige egenvektorer.]

Da: Finner P slik at $A = PDP^{-1}$, D diagonal ved:

1. Finn alle egenverdier λ (alle løsninger av karakteristisk ligning $\det(A - \lambda I) = 0$)
2. For hver λ_i, finn basis for tilhørende egenrom ved å løse systemene $\boxed{(A - \lambda_i I)\underline{x} = \underline{0}}$
3. For n lin. uavh. egenvektorer $\underline{v}_i$ med $A\underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i$ oppfyller da $P = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n]$, $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$:

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

[Ortogonal diagonalisering av A mulig $\Leftrightarrow$ $A^T = A$ (A symmetrisk)]

Finner ortogonal P (Dvs: $P^{-1} = P^T$ / $P^TP = I$:
= kolonner ortonormalt sett
= rader — " —)

som oppfyller $\boxed{A = PDP^T}$

ved å bruke diagonalisering + Gram-Schmidt algoritme på basisen til hvert av egenrommene for distinkte egenverdier.
Normalisér (del på lengden) $\Rightarrow$

ortonormalt sett av egenvektorer } : sett som kolonner i P

Teknisk: Husk:

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$
$\det(A^T) = \det A$
$\det(A^{-1}) = 1/\det A$ (siden: $|AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$, $|AA^{-1}| = |I| = 1$)

- Du må kunne regne ut determinanter, radredusere matriser, transponere (A^T) matriser, kunne bruke Gram-Schmidt, ortogonal projeksjon og minste kvadraters metode.
- Kjenne/bruke: Basis, dimensjon, lineær uavhengighet, span, underrom etc.

Systemer av diff. ligninger

(1. ordens, homogene, lineære, konstante koeffisienter)

La $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$, $\underline{y}' = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix}$ for n funksjoner $y_1(t), \dots, y_n(t)$.

$\boxed{\text{METODE}}$ For å finne generell løsning til systemet (1) $\boxed{\underline{y}' = A\underline{y}}$ der A $n \times n$-matrise:

- Dersom $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ er n lineært uavhengige egenvektorer til A m/tilhørende (ikke nødvendigvis distinkte) egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, så er

$\boxed{\text{GENERELL LØSNING}}$ til system (1)

$$\boxed{\underline{y} = c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot \underline{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \cdot \underline{v}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \cdot \underline{v}_n}$$

for $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Ligning}}$

$$\boxed{y^{(n)} = a_n y^{(n-1)} + \dots + a_2 y' + a_1 y}$$

kan skrives som system:

$\boxed{\text{der } y(t) = y_1(t)}$

Tilsvarende $\boxed{\text{system}}$

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n \end{aligned}$$

dvs: $\underline{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \end{bmatrix} \underline{y}$