# Differensialligninger (K Kap 2)

## (1) HOMOGEN

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

## (2) INHOMOGEN

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

$p, q, r$ kontinuerlige på $I$

**Eksistens og entydighet:**

(1) med initialbetingelse
$y(x_0) = k_0$, $y'(x_0) = k_1$ $(x_0 \in I)$
har entydig løsning $y(x)$ på $I$

Tilsvarende for (2)

**Generell løsning:**

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$y_1(x), y_2(x)$ basis av løsninger for (1)

$$y = y_h + y_p$$

$y_p(x)$ partikulær løsning av (2)

**Metoder:**

1) $y'' + ay' + by = 0$   $a$ og $b$ konstanter
Karakteristisk ligning $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$
tabell (K2.2) / nettsidenotat

2) $x^2 y'' + axy' + by = 0$
Euler-Cauchy $y = x^m$
Hjelpeligning $m^2 + (a-1)m + b = 0$

3 Gitt én løsning $y_1(x)$,
finn $y_2 = u(x)y_1$
(reduksjon av orden)

**Finne $y_p$:**

$r(x)$ i tabell (K2.7) / nettsidenotat
ubestemte koeff. metode
(NB: modifikasjonsregel)
ellers: variasjon av parametre

**Variasjon av parametre:**

$$y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2$$

ligningssystem for $u', v'$
eller formel i K2.10

# Svingninger (K 2.4, 2.8)

**A Frie svingninger** $my'' + cy' + ky = 0$

(i) uten dempning $my'' + ky = 0$ Løsning på formen:

$c = 0$ $y_h = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = C\cos(\omega_0 t - \delta)$

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ (Harmonisk svingning)

(ii) med dempning
$c > 0$

I overdempning (reelle $\lambda_1 \neq \lambda_2$)

II kritisk dempning (reelle $\lambda_1 = \lambda_2$)

III underdempning (komplekse $\lambda$)

**B Tvungne svingninger** $my'' + cy' + ky = F_0 \cos\omega t$

periodisk ytre kraft

(i) uten dempning, $c=0$

$y_h$ som i A (i)

$\omega \neq \pm\omega_0$: $y_p$ på formen:

$y_p = a\cos\omega t + b\sin\omega t$

$y = y_h + y_p$ (to harmoniske svingninger)

$\omega = \pm\omega_0$: resonans, må modifisere $y_p$:

$y_p = t\,(a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t)$

$t \to \infty$ når $t \to \infty$

(ii) med dempning, $c > 0$

$y_h$ som i A (ii)

$y_p$ på formen: $y_p = a\cos\omega t + b\sin\omega t$

$y_p$ er stasjonær løsning (steady state)

$y = y_h + y_p$, $y_h \to 0$ når $t \to \infty$