Lineære ligningssystem og matriser (EP kap 1)

m ligninger, n ukjente (variabler) : $\quad A\mathbb{x} = \mathbb{b}$

der

$$A = [a_{ij}] \qquad \mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$m \times n$-matrise

Gausseliminasjon:

Omformer totalmatrisen $[A \,|\, \mathbb{b}]$ til <u>echelonmatrise</u>

ved elementære radoperasjoner $\left((c)R_p,\ \mathrm{SWAP}(R_p, R_q),\ (c)R_p + R_q \right)$

$(\quad \cdot c \qquad\qquad\qquad\qquad)$

Gauss-Jordaneliminasjon:

Gaussel. + omforme echelonmatrisen til <u>redusert echelonmatrise</u>

$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ er konsistent (har løsning)

hvis echelonmatrisen <u>ikke</u> har rad $[0 \dots 0 \,|\, d]$ der $d \neq 0$.

Løsningen er entydig (unik) hvis alle ukjente er ledervariabler.

Uendelig mange løsninger hvis minst en ukjent er fri variabel

Ligningssystemet på echelonform løses ved <u>tilbakesubstitusjon</u>

Matrisemultiplikasjon

$$\underset{m\times p}{A} \quad \underset{p\times n}{B} \qquad \underset{m\times n}{AB} = [c_{ij}] \text{ der } c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

($p = p$)

(c_{ij} = (i-te rad i A) $\cdot$ (j-te kolonne i B))

AB kan være ulike BA (ikke kommutativt)

Invers ($n\times n$-) matrise

A er <u>inverterbar</u> hvis det fins B slik at $AB = BA = I$

B er invers til A, $A^{-1} = B$ (nok med $AB = I$)

Merk: $(A^{-1})^{-1} = A$, $(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$

Finne A^{-1}:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Generelt:

$$[A \mid I] \xrightarrow[\text{eliminasjon}]{\text{Gauss-Jordan-}} [I \mid A^{-1}]$$

$(AX = I \Leftrightarrow A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{x}_n = \mathbf{e}_n$, løses parallelt$)$

Teorem: Følgende utsagn er ekvivalente for $n\times n$-matrise A

(1) A er inverterbar

(2) A er radekvivalent med I (redusert echelonmatrise for A er I)

(3) Det homogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har bare løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

(4) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har entydig løsning for enhver n-vektor $\mathbf{b}$ $(\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b})$

(5) $\det A \neq 0$ (EP2.3)

Determinanter (EP kap 2, ikke 2.4 på semesterprøven)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Generelt:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\det A = |A|$ kan beregnes ved kofaktorutvikling (vilkårlig rad/kolonne) og forenkles ved elementære rad/kolonneoperasjoner

Husk også:

$$\det A^T = \det A$$

$$\det AB = (\det A)(\det B)$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \qquad (\text{hvis } \det A \neq 0)$$

og $\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ (produktet av diagonalelementene) hvis A er triangulær matrise