

Radrom, kolonnerom, nullrom

A $m \times n$ -matrise, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Radrommet til A = $\text{Row}(A)$ = underrom i \mathbb{R}^n
som er utspent av radene i A

Kolonnerommet til A = $\text{Col}(A)$ = underrom i \mathbb{R}^m
som er utspent av kolonnene i A

Nullrommet til A = $\text{Null}(A)$ = alle x i \mathbb{R}^n slik at $Ax = 0$,
løsningsrommet til $Ax = 0$

$$Ax = 0 \Leftrightarrow x \text{ ortogonal til alle rader i A}$$

$$\text{dvs. } \text{Row}(A)^\perp = \text{Null}(A)$$

$$\text{Col}(A)^\perp = \text{Null}(A^T)$$

Dimensjoner:

$$\text{rang}(A) = \dim \text{Row}(A) = \dim \text{Col}(A)$$

$$\text{rang}(A) + \dim \text{Null}(A) = n$$

Finne basiser

$A \xrightarrow{\text{Gauss}} E$ (echelonmatrise) evt. GaussJordan til redusert echelonmatrise

Basis for Row(A): Ikke nullradene i E

Basis for Col(A): Kolonnene i A som tilsvare pivotkolonnene i E

Basis for Null(A): $AX = 0 \Leftrightarrow EX = 0$. Med R frie variabler får generell løsning formen $X = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_R v_R$. Da er v_1, v_2, \dots, v_R basis for Null(A)

Anvendelse: Finn basis for $V = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ og V^\perp

La v_1, v_2, \dots, v_s være rader (evt. kolonner) i en matrise A og finn basis for Row(A) (evt. Col(A)), for V er da lik Row(A) (henholdsvis Col(A)).

Med $V = \text{Row}(A)$ er basis for Null(A) = basis for V^\perp
(med $V = \text{Col}(A)$ er basis for Null(A^T) = basis for V^\perp)

$$\dim V + \dim V^\perp = n$$

Inhomogene ligningssystem

$A\mathbb{X} = \mathbb{b}$ er konsistent hvis og bare hvis \mathbb{b} er i $\text{Col}(A)$

Da er generell løsningsform $\mathbb{X} = \mathbb{X}_0 + \mathbb{X}_h$

der \mathbb{X}_0 er én løsning av $A\mathbb{X} = \mathbb{b}$ og $\mathbb{X}_h = t_1 \mathbb{V}_1 + \dots + t_k \mathbb{V}_k$

er generell løsning av det homogene systemet $A\mathbb{X} = \mathbb{0}$

Minste kvadraters løsning av inkonsistent system $A\mathbb{X} = \mathbb{b}$

er en løsning $\bar{\mathbb{X}}$ av normalsystemet $A^T A \bar{\mathbb{X}} = A^T \mathbb{b}$

Da er $\mathbb{p} = A\bar{\mathbb{X}}$ den ortogonale proj. av \mathbb{b} inn i $\text{Col}(A)$

Kvadratiske matriser

For $n \times n$ -matrise A er følgende ekvivalent:

- (1) A er inverterbar
- (2) A er radekvivalent med identitetsmatrisen I
- (3) $A\mathbb{X} = \mathbb{0}$ har bare triviell løsning $\mathbb{X} = \mathbb{0}$
- (4) $A\mathbb{X} = \mathbb{b}$ har entydig løsning ($\mathbb{X} = A^{-1}\mathbb{b}$) for alle $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$
- (5) $\det A \neq 0$
- (6) kolonnene i A er lineært uavhengige
- (7) $\text{rang}(A) = n$
- (8) 0 er ikke egenverdi for A

Gram-Schmidts algoritme

gir ortogonal basis u_1, u_2, \dots, u_k for underrom
 V i \mathbb{R}^m med basis v_1, v_2, \dots, v_k

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1$$

$$u_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{v_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2$$

osv.

Projeksjonsformelen

$$p = \frac{b \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{b \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 + \dots + \frac{b \cdot v_k}{v_k \cdot v_k} v_k$$

for å finne den ortogonale projeksjonen p av en vektor
 b i \mathbb{R}^m inn i et underrom V i \mathbb{R}^m med ortogonal basis v_1, \dots, v_k

$$b = p + q \text{ der } p \in V \text{ og } q \in V^\perp$$

Eigenverdier/eigenvektorer

$$v \neq 0, Av = \lambda v$$

En $n \times n$ -matrise A er diagonaliserbar \Leftrightarrow A har n lin. uavh. eigenvektorer

Da finner vi matrise P slik at $P^{-1}AP$ er diagonalmatrise:

- ① Finn alle eigenverdier λ ved å løse $\det(A - \lambda I) = 0$
- ② For hver eigenverdi λ_i , finn basis for tilhørende egenrom ved å løse systemet $(A - \lambda_i I)v = 0$
- ③ Med n lin. uavh. eigenvektorer v_1, \dots, v_n og eigenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ setter vi

$$P = [v_1 \dots v_n] \text{ og } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}. \text{ Da er } \boxed{P^{-1}AP = D}$$

A er ortogonalt diagonaliserbar \Leftrightarrow A er symmetrisk ($A^T = A$)

Da finner vi ortogonal matrise P ($P^T P = I$ dvs. $P^{-1} = P^T$, kolonnene i P er ortogonale enhetsvektorer) som diagonaliserer A :

- ① Finn alle eigenverdiene og en ortogonal basis for hvert egenrom. (Bruk f. eks. Gram-Schmidt hvis $\dim \geq 2$)
- ② Normaliser eigenvektorene ved å dele på lengden, og bruk n ortogonale eigenvektorer med lengde 1 som kolonner i P

Da er $P^{-1} = P^T$ og $P^{-1}AP = D$ slik at $\boxed{P^T A P = D}$

Anvendelser av egenverdier/egenvektorer

① Potenser av matriser ($A^k = ?$)

Hvis A er diagonaliserbar, $P^{-1}AP = D$, så er

$$A = PDP^{-1} \quad \text{og} \quad A^k = PD^kP^{-1}$$

② System av diff. ligninger

$$Y' = AY \quad \text{der} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad Y' = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix}$$

Hvis A har n lin. uavh. egenvektorer v_1, v_2, \dots, v_n med egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ så er generell løsning

$$Y = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$$

③ Kjeglesnitt og dreining av koordinatsystemet

A symmetrisk 2×2 -matrise, ortogonal og $P^T A P = D$

Koordinatskiftet $X = P X'$ omformer

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = X^T A X \quad \left(A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)$$

til

$$(X')^T D X' = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 \quad (\text{uten produktledd } x'y')$$

$\det P = \pm 1$, hvis $\det P = 1$ så er $x'y'$ -koordinatsystemet

en rotasjon av xy -systemet