

EGENVERDIER OG EGENVEKTORER

1. PROBLEMSTILLING

La A være en $n \times n$ -matrise.

Finnes en vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

der $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

og er reelt tall λ

slik at

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Hvis svaret er ja kalles

λ for en **egenverdi** til A

og

$\mathbf{v}$ for en **egenvektor** til A

Eksempel 1.

Gitt 2×2 -matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da er

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Det vil si:

$\lambda = 3$ er en egenverdi for A

med egenvektor

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Merknad 1.

La $\mathbf{v}$ være en egenvektor av A

med tilhørende egenverdi λ

La k være en skalar

Da er $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$ også en egenvektor til A

med tilhørende egenverdi λ :

$$A\mathbf{u} = A(k\mathbf{v}) = k A\mathbf{v} = k\lambda\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$$

2. KARAKTERISTISK LIKNING

Vi bruker følgende metode for å finne λ

La

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

være $n \times n$ -identitetsmatrisen.

Da er $\mathbf{v} = I\mathbf{v}$

Vi skriver om egenvergilikningen

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

til

$$A\mathbf{v} = \lambda I\mathbf{v}$$

setter alt på samme side av '='-tegnet

$$A\mathbf{v} - \lambda I\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Setter $\mathbf{v}$ utenfor parentes

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Nå husker vi at

Et homogent lineært system

$$B\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

med n likninger

og n ukjente

har løsning $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

hvis og bare hvis $|B| = 0$

Dvs.

Teorem 1 (Karakteristisk likning). λ er en egenverdi til $n \times n$ -matrisen A hvis og bare hvis

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

Den karakteristiske likningen er et polynom i λ

$$(-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0$$

Algoritme 1 (Egenverdier og egenvektorer).

(1) Løs den karakteristiske likningen

$$|A - \lambda I|$$

(2) For hver egenverdi λ , løs likningen

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$$

Eksempel 2. La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

finn egenvektorene til A .

LØSNING:

Den karakteristiske likningen er

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$$

Trinn 1: egenverdiene til A er

$$\lambda_1 = 3$$

og

$$\lambda_2 = 1.$$

Trinn 2: ($\lambda_1 = 3$) Vi løser $\begin{bmatrix} 3 - \lambda_1 & 2 \\ 0 & 1 - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$

Koeffisient-matrise: $A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

med echelonform $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Dvs $x = t$ $y = 0$: $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Trinn 2. ($\lambda_2 = 1$) Vi løser $\begin{bmatrix} 3 - \lambda_2 & 2 \\ 0 & 1 - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$

Koeffisient-matrise: $A - 1I = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

med echelonform $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Dvs $y = t$ $x = -t$: $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. INGEN REELLE EGENVERDIER

Eksempel 3. Den karakteristiske likningen til $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ er

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(1 - \lambda) - (-1)1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

Det gir løsningen

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{-1}$$

og

$$\lambda_2 = 1 + \sqrt{-1}$$

Dvs A har ingen egenverdier.

Eksempel 4. Identitets matrisen

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karakteristisk likning:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2$$

Dvs I har en egenverdi $\lambda = 1$. Egenvektorer er alle $\mathbf{v} = (x, y)$

Vi velger 2 $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ og $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$.

Eksempel 5. Karakteristisk likning til

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

er $(4 - \lambda)^2$:

En enkel egenverdi $\lambda = 4$

Egenvektorer?

Vi løser $(A - 4I)\mathbf{v} = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$\mathbf{v} = (1, 0)$

4 muligheter for 2×2 -matrise A :

- 2 forskjellige egenverdier med hver sin egenvektor
- Ingen egenverdier
- 1 egenverdi, 2 lineært uavhengige egenvektorer
- 1 egenverdi og 1 egenvektor

4. TRE GANGER TRE MATRISER

3×3 -matrise A :

Karakteristisk likning

$$-\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0$$

Eksempel 6. Finn egenverdier og egenvektorer til

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

løsning: Trinn 1

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 3-\lambda & -6 \\ -1 & 1 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

Karakteristisk likning

$$(1) \quad |A - \lambda I| = (2-\lambda)\{(3-\lambda)(-2-\lambda)+6\} = (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda) = \lambda(\lambda-1)(2-\lambda)$$

Eigenverdier:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_3 &= 2 \end{aligned}$$

Trinn 2:

(1) For $\lambda_1 = 0$ løser vi

$$(A - 0I)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

gir $x = 0, z = t, y = 2t$:

$t = 1$ gir

$$\mathbf{v}_1 = (0, 2, 1)$$

(2) For $\lambda_2 = 1$ løser vi

$$(A - 1I)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

gir $x = 0, z = t, y = 3t$:

$(t = 1)$ gir

$$\mathbf{v}_2 = (0, 3, 1)$$

(3) For $\lambda_3 = 2$ løser vi

$$(A - 2I)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -6 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

gir $z = t, x = \frac{1}{2}t, y = \frac{9}{2}t$:

$(t = 2)$ gir

$$\mathbf{v}_3 = (1, 9, 2)$$

Merknad 2. A har egenverdi 0 hvis og bare hvis A er singulær

Teorem 2. A : $n \times n$ -matrise og λ : egenverdi til A

V mengden som inneholder $\mathbf{0}$ og alle egenvektorer $\mathbf{v}$ med egenverdi λ

V er et underrom av $\mathbb{R}^n$

V kalles for **egenrommet** til A tilhørende λ

Eksempel 7. Finn egenrommene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Løsning: Trinn 1: Finn karakteristisk likning

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Det blir $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = 0$

Vi prøver med heltallsløsninger og finner ut at $\lambda = 1$ er løsning
polynomdivisjon: gir

$$(2) \quad \begin{array}{r} -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 : (1 - \lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 \\ -(-\lambda^3 + \lambda^2) \\ \hline 4\lambda^2 - 7\lambda + 3 \\ -(4\lambda^2 - 4\lambda) \\ \hline -3\lambda + 3 \\ -(-3\lambda + 3) \\ \hline 0 \end{array}$$

Løser $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$.

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$\lambda_1 = 3$ Denne viste vi fra før

$\lambda_2 = 1$

Trinn 2:

(1) For $\lambda_1 = 3$ løser vi

$$(A - 3I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

har koeffisient matrise

$$(A - 3I) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Redusert echelonform:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Løsning $z = t, x = y = t$:

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$$

(2) For $\lambda_2 = 1$ løser vi

$$(A - I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

har koeffisient matrise

$$(A - I) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Redusert echelonform

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$y = s, z = t, x = -2s + t$:

$$\begin{array}{llll} s = 1 & \text{and} & t = 0 & \text{gives} & \mathbf{v}_2 = (-2, 1, 0) \\ s = 0 & \text{and} & t = 1 & \text{gives} & \mathbf{v}_3 = (1, 0, 1) \end{array}$$

Svar:

For $\lambda_1 = 3$ har vi egenrommet utspent av $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$

Eigenverdi	basis for egenrom	dimensjon
3	$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$	1
1	$\mathbf{v}_2 = (-2, 1, 0)$ $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)$	2

For $\lambda_2 = 1$ har vi egenrommet utspent av og $\mathbf{v}_2 = (-2, 1, 0)$ og $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)$