1. Andre ordens lineære ODE

Standard form:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

Homogen: Når $r(x) = 0$

Inhomogen: Når $r(x) \neq 0$

Initialverdiproblem: Løs ODE med initsialbetingelser

$$y(x_0) = K_0 \qquad\qquad y'(x_0) = K_1$$

1.1. Superposisjonsprinsippet for lineær homogene ODE.

y_1 og y_2 er løsning impliserer at $y_1 + y_2$ er løsning

1.2. Redusering av orden til lineær homogene ODE.

Kjenner løsning y_1 av likning

Finner $y_2 = u(x)y_1$.

Der

$$u = \int_1 U \, dx$$

og

$$U = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p\, dx}.$$

1.3. **Lin ODE med konstante koefisienter.**

1.4. **Homogen.** Løsnings metode for

$$y'' + ay' + by = 0 :$$

Finner karakteristisk polynom

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Løser karakteristisk polynom:

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Løsningen er til ODE er

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \qquad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

Diskriminanten $d = a^2 - 4b$ avgjør hva som skjer videre:

(I)	$d > 0$	$y = c_1\, e^{\lambda_1 x} + c_2\, e^{\lambda_2 x}$
(II)	$d = 0$	$y_1 = (c_1 + c_2\, x)e^{-(a/2)x}$
(III)	$d < 0$	$y_1 = e^{-(a/2)x}(A\cos\,\omega x + B\sin\,\omega x)$ $\omega^2 = -d/4$

c_1, c_2, A og B er vilkårlige konstanter (Superposisjon-sprinsippet gjelder)

1.5. **Frie svingninger.** Likning for fri svigning

$$my'' + cy' + ky = 0$$

(I)	$c^2 > 4mk$	Over	
(II)	$c^2 = 4mk$	Kritisk	Demping
(III)	$c^2 < 4mk$	Under	

1.6. **Euler Cauchy likningen.**

$$x^2y'' + axy' + by = 0$$

Karakteristisk likning:

$$m^2 + (a-1)m + b = 0$$

Finner røtter m_1 og m_2. Løsning er da

(I)	$m_1 \neq m_2$ reelle	$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$
(II)	$m_1 = m_2 = m$	$y = (c_1 + c_2 \ln x) x^m$
(III)	m_i komplekse	Ikke pensum

1.7. **Eksistens entydighet.**

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Teorem 1. *$p(x)$ og $q(x)$ kontinuerlige på I, $x_0 \in I$*

Løsninger y_1 og y_2 lin. avhengig

hviss Wronski determinanten

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = 0$$

i x_0

Teorem 2. *Generell løsning av lin. homogen ODE*

$$y(x) = c_1y_1 + c_2y_2$$

inneholder alle løsninger

1.8. **Inhomogene lin. ODE.**

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

Strategi:

Løs først den tilhørende homogene likningen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Homogen løsning

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2$$

Da er det to muligheter:

- Ubestemte koeffisienters metode: Se slide og notat på hjemmesiden
- Varisajon av parametre:

1.9. **Variasjon av parametre.** Løsningen er

$$y_h + y_p$$

der

Partikulær løsning

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W}\, dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W}\, dx$$

Pass på at likningen er på standardform.