TMA4110 MATEMATIKK 3

Semesterprøve tirsdag 10. oktober 2006

Løsningsforslag

Oppgave 1 Hvilket av alternativene er polarform $re^{i\theta}$ for $z = (-2+4i)/(3-i)$?

$\boxed{\textbf{A:}\quad \sqrt{2}\,e^{i(3\pi/4)}}$ **B:** $e^{i(5\pi/4)}$ **C:** $2e^{i(3\pi/4)}$ **D:** $\sqrt{2}\,e^{i(7\pi/4)}$

Vi har

$$z = \frac{-2+4i}{3-i} = \frac{(-2+4i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{-10+10i}{9+1} = -1+i.$$

Da er $\tan\theta = 1/(-1) = -1$, og siden z er i 2. kvadrant, får vi $\theta = \arctan(-1) + \pi = 3\pi/4$. Videre er $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Følgelig er $z = \sqrt{2}\,e^{i(3\pi/4)}$.

Oppgave 2 Hvor mange løsninger $z \neq 0$ har ligningen $z^2 = \overline{z}$?

A: ingen **B:** en **C:** to $\boxed{\textbf{D:}\quad \text{tre}}$

Bruker vi polarform $z = re^{i\theta}$, har vi $z^2 = \overline{z} \Leftrightarrow r^2e^{i(2\theta)} = re^{i(-\theta)} \Leftrightarrow r^2e^{i(3\theta)} = r$. Ved forkorting med r ($z \neq 0$) får vi $re^{i(3\theta)} = 1$. Det gir $r = 1$ og $3\theta = 2k\pi$ dvs. $r = 1$ og $\theta = 2k\pi/3$ (k heltall). Følgelig har vi tre løsninger $z = z_k = e^{i(2k\pi/3)}$, $k = 0, 1, 2$. Alternativt: Med $z = x + iy$ er

$$z^2 = \overline{z} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + 2ixy - y^2 = x - iy \quad \Longleftrightarrow \quad (1)\ x^2 - y^2 = x \quad \text{og} \quad (2)\ 2xy = -y.$$

Ligning (2) er oppfylt hvis $y = 0$ eller $x = -\frac{1}{2}$. Innsatt i (1) får vi $x = 0$ eller $x = 1$ hvis $y = 0$, og $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ hvis $x = -\frac{1}{2}$. Siden $z \neq 0$ blir det tre løsninger: $z_1 = 1$ og $z_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}$.

Oppgave 3 Hvilket par av funksjoner er en basis av løsninger for differensialligningen

$$(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0, \qquad -1 < x < 1\,?$$

A: $y_1 = x,\ y_2 = 1$ **B:** $y_1 = x,\ y_2 = x^2$ $\boxed{\textbf{C:}\quad y_1 = x,\ y_2 = x^2+1}$ **D:** $y_1 = x,\ y_2 = 2x$

En basis av løsninger er to lineært uavhengige løsninger. Siden $y_1 = x$ er felles for alle alternativene, må $y_1 = x$ være løsning (det kan vi kontrollere ved innsetting). Videre ser vi at $y_2 = 1$ ikke passer i ligningen, og at $y_2 = 2x$ er lineært avhengig av $y_1 = x$. Da må svaret være $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ eller $y_1 = x$, $y_2 = x^2 + 1$. Ved innsetting finner vi at $y_2 = x^2 + 1$ er løsning:

$$(1-x^2)y_2'' + 2xy_2' - 2y_2 = (1-x^2)2 + 2x(2x) - 2(x^2+1) = 0.$$

Oppgave 4 Bestem $y(2)$ for løsningen av initialverdiproblemet

$$y'' - y' + 0.25y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

$\boxed{\textbf{A:}\quad 4e}$ **B:** $2e$ **C:** $4e^2$ **D:** $2e^2$

Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 - \lambda + 0.25 = 0$ har dobbelrot $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$. Dermed er $y = c_1 e^{x/2} + c_2 x e^{x/2}$. Initialbetingelsene gir $c_1 = 0$ og $c_2 = 2$, og følgelig $y = 2xe^{x/2}$ og $y(2) = 4e$.

Oppgave 5 Et masse–fjærsystem starter med $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$ og har bevegelsesligning

$$2y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Hva slags dempning har systemet?

A: overdempning **B:** kritisk dempning $\boxed{\textbf{C:}\ \text{underdempning}}$ **D:** ingen dempning

Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 + 1.5\lambda + 1 = 0$ (etter divisjon med 2) har *komplekse* røtter $\lambda = (-1.5 \pm i\sqrt{1.75}\,)/2$. Da er svingningen underdempet.

Oppgave 6 Hvilket alternativ vil gi en partikulær løsning av differensialligningen

$$y'' + y' - 6y = e^{2x}(1 + e^x)\,?$$

A: $Ae^{2x}(1 + e^x)$ **B:** $Axe^{2x}(1 + e^x)$ **C:** $e^{2x}(A + Be^x)$ $\boxed{\textbf{D:}\ e^{2x}(Ax + Be^x)}$

Homogenløsningen er her $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$. Høyresiden er $r(x) = e^{2x}(1 + e^x) = e^{2x} + e^{3x}$. Siden e^{2x} inngår i y_h, må vi modifisere det tilsvarende leddet i y_p, og formen på y_p blir da $y_p = Axe^{2x} + Be^{3x} = e^{2x}(Ax + Be^x)$. (Generell løsning er $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{5}xe^{2x} + \frac{1}{6}e^{3x}$.)

Oppgave 7 Hvilket alternativ er en generell løsning av differensialligningen

$$x^2 y'' + xy' - y = 15x^2, \quad x > 0\,?$$

A: $y = c_1 x + c_2 x^{-1} + x^4$ $\boxed{\textbf{B:}\ y = c_1 x + c_2 x^{-1} + 5x^2}$

C: $y = c_1 x + c_2 x^2 + x^{-1}$ **D:** $y = c_1 x + c_2 x^{-1} + x^2 + 5$

Den homogene ligningen er Euler–Cauchy, og $y = x^m$ er løsning hvis $m^2 - 1 = 0$, $m = \pm 1$. Følgelig er $y_1 = x$ og $y_2 = x^{-1}$ to lineært uavhengige løsninger, og $y_h = c_1 x + c_2 x^{-1}$.

For å finne y_p, bruker vi metoden med variasjon av parametre og søker en partikulær løsning på formen $y_p = uy_1 + vy_2$. Formelen i Kreyzig 2.10, med $r = 15x^2/x^2 = 15$ og Wronskideterminant $W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = -2x^{-1}$ gir

$$y_p = -x \int \frac{x^{-1} \cdot 15}{-2x^{-1}}\,dx + x^{-1} \int \frac{x \cdot 15}{-2x^{-1}}\,dx = \frac{15}{2}\left(x \int dx - x^{-1} \int x^2\,dx \right) = 5x^2.$$

Alternativt: u' og v' skal tilfredsstille ligningssystemet $u'y_1 + v'y_2 = 0$, $u'y_1' + v'y_2' = r$ som her blir $xu' + x^{-1}v' = 0$, $u' - x^{-2}v' = 15$ eller $x^2u' + v' = 0$, $x^2u' - v' = 15x^2$ etter multiplikasjon med x hhv. x^2. Det gir $u' = 15/2$ og $v' = -(15/2)x^2$ og $y_p = 5x^2$ som ovenfor. Generell løsning er $y = y_h + y_p = c_1 x + c_2 x^{-1} + 5x^2$.

Oppgave 8 Et ligningssystem er gitt ved

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + \ \ x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_3 + \ \ x_4 &= 3 \ . \end{aligned}$$

Hvis $x_4 = t$, hva blir x_1?

A: $x_1 = 2$ **B:** $x_1 = 6 + 2t$ **C:** $x_1 = 6t$ $\boxed{\textbf{D:}\ \ x_1 = 6}$

Ligningssystemet er på echelonform og løses ved tilbakesubstitusjon. Hvis fri variabel $x_4 = t$, får vi $x_3 = 3 - x_4 = 3 - t$, $x_2 = 2 - x_3 - 2x_4 = -1 - t$ og til slutt $x_1 = 1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 6$.

Oppgave 9 La A og B være 2×2–matriser. Finn B^{-1} dersom

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

A: $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$ $\boxed{\textbf{B:}\ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$ **C:** $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ **D:** $\begin{bmatrix} 5 & 11 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

Vi bruker at $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Ved å høyremultiplisere begge sider med A får vi $(AB)^{-1}A = B^{-1}A^{-1}A = B^{-1}I = B^{-1}$. Altså er

$$B^{-1} = (AB)^{-1}A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 10 Determinanten det A til en matrise A skal beregnes. Hva blir svaret hvis

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -8 & 0 & 7 \\ 1 & 5 & 0 & -6 \end{bmatrix}?$$

$\boxed{\textbf{A:}\ \ -2}$ **B:** 0 **C:** 2 **D:** ingen av disse

Ved kofaktorutvikling langs tredje kolonne og langs første rad i neste determinant får vi

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -8 & 0 & 7 \\ 1 & 5 & 0 & -6 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -5 & -8 & 7 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix} \\ &= 2 \left(-3 \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} + (-4) \begin{vmatrix} -5 & -8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \right) = 2(-69 + 68) = -2. \end{aligned}$$