TMA4115 MATEMATIKK 3

Semesterprøve tirsdag 13. mars 2007

Løsningsforslag

Oppgave 1 Hva blir $(-1+i)^{17}$?

A: $-65536\sqrt{2} + (65536\sqrt{2})i$ $\boxed{\textbf{B:}\quad -256+256i}$ **C:** $256-256i$ **D:** $256+256i$

Vi gjør $-1+i$ om til polarform $-1+i = re^{i\theta}$. Finner $r = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$ og $\theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Siden $-1+i$ er i 2. kvadrant velger vi $k=1$. Dvs. $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Da er $|(-1+i)^{17}| = r^{17} = (\sqrt{2})^{17}$ og $\arg((-1+i)^{17}) = 17\theta = 17\frac{3\pi}{4} = \frac{51\pi}{4}$. Dvs. $\mathrm{Arg}((-1+i)^{17}) = \arg((-1+i)^{17}) - 6\cdot(2\pi) = \frac{3\pi}{4}$. Dvs. $(-1+i)^{17} = (\sqrt{2})^{17}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = -256+256i$.

Alternativt: $(-1+i)^2 = 1-2i+i^2 = -2i$, $(-1+i)^4 = (-2i)^2 = -4$, $(-1+i)^{16} = (-4)^4 = 256$, $(-1+i)^{17} = (-1+i)^{16}(-1+i) = 256(-1+i) = -256+256i$.

Oppgave 2 Gitt differensiallikningen

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\cos^2 x}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

En partikulær løsning har formen $y_p(x) = u(x)e^x + v(x)xe^x$ der $u(x)$ og $v(x)$ er funksjoner som også tilfredstiller likningen $0 = u'(x)e^x + v'(x)xe^x$. Hva blir $u'(x)$?

A: $\tan x$ **B:** $1/\cos^2 x$ **C:** $-x\tan x - \ln(\cos x)$ $\boxed{\textbf{D:}\quad -x/\cos^2 x}$

Funksjonene $u'(x)$ og $v'(x)$ skal tilfredsstille ligningssystemet

$$\begin{aligned} u'y_1 + v'y_2 &= 0 \\ u'y_1' + v'y_2' &= r \end{aligned} \qquad \text{som her blir} \qquad \begin{aligned} u' + xv' &= 0 \\ u' + (x+1)v' &= 1/\cos^2 x \end{aligned}$$

etter forkorting med e^x i begge ligningene. Ved subtraksjon får vi $v' = 1/\cos^2 x$ og dermed $u' = -xv' = -x/\cos^2 x$.

Alternativt kan vi regne ut u' med formelen $u' = -y_2 r/W$ der W er wronskideterminanten

$$W = W(e^x, xe^x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & xe^x + e^x \end{vmatrix} = e^{2x}.$$

Oppgave 3 For hvilken likning utgjør funksjonsparet $\{\ln x, \ln(x^2)\}$, $x > 0$, en basis?

A: $y'' + \frac{1}{x}y' = 0$ **B:** $x^2y'' - xy' = 0$ **C:** $x^2y'' + xy' = 0$ $\boxed{\textbf{D:}\quad \text{ingen}}$

Paret av funksjoner i oppgaven er ingen basis. Vi har at $\ln(x^2) = 2\ln x$. Derfor er $\ln x$ og $\ln(x^2)$ lineært avhengige.

Oppgave 4 Gitt differensiallikningen

$$y'' - 5y' + 6y = xe^{3x}.$$

Hva er riktig valg av $y_p(x)$ i metoden for ubestemte koeffisienter?

A: Ax^2e^{2x} **B:** Axe^{3x} $\boxed{\textbf{C:}\quad (Ax^2 + Bx)e^{3x}}$ **D:** $(Ax + B)e^{3x}$

Den karakteristiske likningen til den tilhørende homogene difflikningen er $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Denne har løsninger $\lambda_1 = 3$ og $\lambda_2 = 2$. Den tilhørende homogene difflikningen har derfor løsning $y_h = c_1e^{3x} + c_2e^{2x}$. Den inhomogene likningen har inhomogent ledd $r(x) = xe^{3x}$ som er produktet av x og e^{3x}. "x" gir faktoren $Ax + B$ i kandidaten for y_p (regel 1). "e^{3x}" gir i utgangspunktet faktoren Ke^{3x}(regel 1), men siden denne er løsning til den homogene likningen så får vi faktoren Kxe^{3x} i stedet (regel 2). Vi kan la $K = 1$. Produktet av disse er $(Ax^2+Bx)e^{3x}$.

Oppgave 5 Et dempet masse-fjær-system har svingeligning

$$my'' + 4y' + 3y = 0$$

der m er massen. Hvilken verdi av m gir kritisk dempning?

A: 12 $\boxed{\textbf{B:}\quad \frac{4}{3}}$ **C:** $\frac{16}{3}$ **D:** ingen av disse

Betingelsen $c^2 = 4mk$ gir likningen $16 = 12m$ for våre verdier $c = 4$ og $k = 3$. Det gir $m = \frac{4}{3}$.

Oppgave 6 Euler-Cauchy-likningen

$$x^2y'' + 3xy' - 4y = 0$$

har basis av løsninger på formen $\{x^m, x^n\}$. Hva er $mn + m + n$?

A: 6 **B:** -7 **C:** 7 $\boxed{\textbf{D:}\quad -6}$

Karakteristisk likning er $p^2 + (a - 1)p + b = 0$. Det blir i dette tilfellet $p^2 + 2p - 4 = 0$. Om m og n er løsninger så får vi $(p - m)(p - n) = p^2 - (m + n)p + mn = p^2 + 2p - 4$. Men da er $m + n + mn = -2 - 4 = -6$.

Alternativt kan du løse den karakteristiske likningen og finne $m = -1 - \sqrt{5}$ og $n = -1 + \sqrt{5}$, og så regne ut $m + n + mn = -6$.

Oppgave 7 For hvilke(n) a har ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x + ay - z &= a \\ ax + y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

uendelig mange løsninger?

A: ingen a $\boxed{\textbf{B:}\quad a = 1}$ **C:** $a = \pm 1$ **D:** alle a

Vi Gausseliminerer for å avgjøre for hvilke a systemet har uendelig mange løsninger:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & -1 & a \\ a & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[(-a)R_1+R_3]{(-1)R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & -2 & 0 \\ 0 & 1-a & 3-a & 1-a^2 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 1-a^2 \end{array}\right].$$

Systemet har entydig løsning når $a \neq 1$ og uendelig mange løsninger (fri variabel y) når $a = 1$.

Oppgave 8 Hvilken av matrisene er på redusert echelonform?

A: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **B:** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\boxed{\textbf{C:} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$ **D:** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matrisen i **C** er en redusert echelonmatrise. De andre er echelonmatriser som, siden et lederelement ikke er eneste element ulik null i sin kolonne, ikke er på redusert echelonform.

Oppgave 9 Bestem matriseelementet a_{11} dersom

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{A:} \quad a_{11} = 0}$ **B:** $a_{11} = 3$ **C:** $a_{11} = 7$ **D:** $a_{11} = 12$

Ved å multiplisere fra venstre med $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ på begge sider får vi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Dermed får vi $a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot (-1) = -1$ og $a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 2 = 2$. Det gir $a_{11} = 0$.

Oppgave 10 Bestem determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{A:} \quad 3}$ **B:** 0 **C:** -3 **D:** ingen av disse

Vi kan forenkle utregningen ved først å addere rad 1 til rad 3 og -3 ganger rad 1 til rad 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 7 - 5 \cdot 2) = 3.$$