LØSNINGSFORSLAG TIL SEMESTERPRØVE I TMA4110, MATEMATIKK 3
17. oktober 2005, kl. 12.15 - 13.45

Oppgave 1 Telleren blir $(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^8 = 16e^{i2\pi} = 16$. Ved å utvide teller og nevner finner vi videre at

$$\frac{16}{3-\sqrt{7}i} = \frac{16(3+\sqrt{7}i)}{(3-\sqrt{7}i)(3+\sqrt{7}i)} = \frac{16(3+\sqrt{7}i)}{9+7} = 3+\sqrt{7}i$$

A: -1	$\boxed{\textbf{B:}3}$	**C:** 7	**D:** 1

Oppgave 2 Ligningen har totalt tre løsninger. Disse er gitt som

$$z = e^{i(\pi/9+2k\pi/3)}, \qquad k = 0, 1, 2$$

For $k = 0$ og $k = 1$ har løsningen positiv imaginærdel.

A: 0	**B:** 1	$\boxed{\textbf{C:}2}$	**D:** 3

Oppgave 3 På normalform er ligningen $y' + \frac{2}{x}y = 4x$. Integrende faktor er $e^{2\ln x} = x^2$, slik at

$$(x^2y)' = 4x^3$$

Integrasjon gir $y(x) = cx^{-2} + x^2$. Innsatt initialbetingelsen finner vi $y(x) = 4x^{-2} + x^2$.

A: 7	**B:** 3	**C:** 10	$\boxed{\textbf{D:}5}$

Oppgave 4 For positive x er $|x|/x = 1$. Altså er $|x|, x$ lineært avhengige på denne definisjonsmengden.

A: $2^x, 3^x$	**B:** $\sin(x), \sin(2x)$	**C:** $1/(1+x),\ x/(1+x)$	$\boxed{\textbf{D:}\text{x,\|x\|}}$

Oppgave 5 Innsetting av x^m i ligningen gir karakteristisk polynom $m^2 - 8m + 7m = 0$. Røttene er

$$m = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{2} = 4 \pm 3.$$

Svaret blir $m + n = 1 + 7 = 8$.

A: 6	**B:** 7	$\boxed{\textbf{C:}8}$	**D:** 9

Oppgave 6 For homogenligninga får vi karakteristisk polynom $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$. Det følger at e^{2x} er en homogenløsning, mens e^x ikke er det.

A: $Ae^x + Be^{2x}$ $\boxed{\textbf{B:}}$ $Ae^x + Bxe^{2x}$ **C:** $Axe^x + Bxe^{2x}$ **D:** $(A + Bx)(e^x + e^{2x})$

Oppgave 7 Homogenligningen har karakteristisk polynom $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$, så en basis av homogenløsninger er $y_1 = e^{-2x}$, og $y_2 = xe^{-2x}$. Vi bruker metoden med variasjon av parametre og søker en partikulærløsning på formen $y_p = uy_1 + vy_2$. Standard formel gir, med Wronski $W = y_1y_2' - y_1'y_2 = e^{-4x}$:

$$u(x) = -\int \frac{xe^{-2x}\sqrt{x}e^{-2x}}{e^{-4x}}dx = \int x^{3/2}dx = -\frac{2}{5}x^{5/2}, \quad v(x) = \int \frac{e^{-2x}\sqrt{x}e^{-2x}}{e^{-4x}}dx = \int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{3/2}$$

Noe som gir $y_p = -\frac{2}{5}x^{5/2}e^{-2x} + \frac{2}{3}x^{5/2}e^{-2x} = \frac{4}{15}x^{5/2}e^{-2x}$.

A: $e^{-2x}/\sqrt{x}$ **B:** $4/3\,x^{3/2}e^{-2x}$ $\boxed{\textbf{C:}}$ $4/15\,x^{5/2}e^{-2x}$ **D:** $2/7\,x^{7/2}e^{-2x}$

Oppgave 8

Gausseliminiasjon gir matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Gauss-Jordan gir så $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{\textbf{A:}8}$ **B:** 9 **C:** 5 **D:** 6

Oppgave 9 Gauss-eliminasjon gir

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -5 \\ 0 & 5 & 2 & 12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 37 & 37 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tilbakesubstitusjon gir den unike løsningen $z = 1$, $y = -5 + 7 = 2$ og $x = 2 + 1 - 2 = -1$.

A: x $\boxed{\textbf{B:}\text{y}}$ **C:** z **D:** Ikke unikt bestemt.

Oppgave 10 For det første er $A = (A^{-1})^{-1}$. Vi finner ved standard formel for inversen av en 2×2 matrise at

$$A = \frac{1}{-30 + 28}\begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 7/2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

A: -5 $\boxed{\textbf{B:}5}$ **C:** -10 **D:** 10