TMA4115 MATEMATIKK 3

Semesterprøve mandag 13. mars 2006

Løsningsforslag

Oppgave 1 Regn ut $(1-i)^{12}$.

$\boxed{\textbf{A:}\quad -64}$ **B:** $64-64i$ **C:** $64+64i$ **D:** 64

Vi har $1-i=\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$. Dermed får vi

$$(1-i)^{12}=\left(\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}\right)^{12}=2^6e^{-3\pi i}=64e^{-i\pi}=-64.$$

Alternativt: $(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$, $(1-i)^4=(-2i)^2=-4$, $(1-i)^{12}=(-4)^3=-64$.

Oppgave 2 Finn *alle* komplekse tall $z=x+iy$ som oppfyller ligningen

$$3z\overline{z}+2\,(z-\overline{z})=39+12i.$$

A: $2+3i$ $\boxed{\textbf{B:}\quad \pm 2+3i}$ **C:** $2\pm 3i$ **D:** $\pm 2\pm 3i$

Med $z=x+iy$ er $z\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$ og $z-\overline{z}=(x+iy)-(x-iy)=2iy$. Den gitte ligningen kan følgelig skrives

$$3(x^2+y^2)+4iy=39+12i.$$

Da er $3(x^2+y^2)=39$ og $4y=12$. Det gir $y=3$ og $x=\pm 2$ slik at $z=\pm 2+3i$.

Oppgave 3 Hvilke to funksjoner utgjør en basis for løsningene av differensialligningen

$$x^2y''-3xy'+3y=0\,?$$

A: $y_1=x,\ y_2=x^2$ $\boxed{\textbf{B:}\quad y_1=x,\ y_2=x^3}$ **C:** $y_1=x^2,\ y_2=x^3$ **D:** $y_1=1,\ y_2=x^3$

Ligningen er Euler–Cauchy, og løses ved å sette inn $y=x^m$. På venstresiden får vi

$$x^2(x^m)''-3x(x^m)'+3(x^m)=x^m[m(m-1)-3m+3]=x^m[m^2-4m+3].$$

Hvis $y=x^m$ skal være løsning, må vi ha $m^2-4m+3=0$ som gir $m=2\pm 1$. Da er $y_1=x$ og $y_2=x^3$ to lineært uavhengige løsninger, og de utgjør følgelig en basis for løsningene.

Oppgave 4 For hvilke verdier av k vil løsningene til $y''+6y'+ky=0$ være funksjoner med uendelig mange nullpunkter?

A: $k=9$ **B:** $k\neq 9$ **C:** $k<9$ $\boxed{\textbf{D:}\quad k>9}$

Hvis løsningene skal ha uendelig mange nullpunkter, må røttene $\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-k}$ i den karakteristiske ligningen være komplekse. (Ellers er løsningene av formen $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ eller $C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$ med høyst ett nullpunkt.) Altså må vi ha $9 - k < 0$, det vil si $k > 9$. Den generelle løsningen er da $y = C_1 e^{-3x} \cos\left(\sqrt{k-9}\,x\right) + C_2 e^{-3x} \sin\left(\sqrt{k-9}\,x\right) = Ce^{-3x} \cos\left(\sqrt{k-9}\,x + \delta\right)$.

Oppgave 5 Gitt differensialligningen $y'' + y' - 2y = xe^{-2x}$. Hvilken form skal vi velge for y_p i ubestemte koeffisienters metode?

A: $Ax^2 e^{-2x}$ $\boxed{\textbf{B:}\ \left(Ax^2 + Bx\right) e^{-2x}}$ **C:** $(Ax + B)\, e^{-2x}$ **D:** Axe^{-2x}

Den homogene ligningen $y'' + y' - 2y = 0$ har karakteristisk ligning $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ med røtter $\lambda_1 = -2$ og $\lambda_2 = 1$. Da er $y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$. Når $r(x) = xe^{-2x}$ skal vi normalt prøve med $(Ax + B)e^{-2x}$, men siden e^{-2x} er løsning av den homogene ligningen, må vi modifisere: $y_p = x(Ax + B)e^{-2x} = (Ax^2 + Bx)e^{-2x}$. (Generell løsning av differensialligningen er $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - (\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{9}x)e^{-2x}$.)

Oppgave 6 Finn en partikulær løsning y_p for differensialligningen

$$y'' - 2y' + y = 6x^{-3} e^x.$$

A: $x^2(x^{-3} + x^{-2} + x^{-1} + 1)e^x$ **B:** $x^{-1}e^x$ $\boxed{\textbf{C:}\ 3x^{-1}e^x}$ **D:** $6x^{-3}e^x$

Den tilhørende homogene ligningen har karakteristisk polynom $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$. En basis for den homogene ligningen er følgelig $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$. Vi bruker metoden med variasjon av parametre, og søker en partikulær løsning på formen $y_p = uy_1 + vy_2$. Formelen i Kreyzig 2.10, med Wronskideterminant $W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{2x}$, gir

$$y_p = -e^x \int \frac{xe^x \cdot 6x^{-3} e^x}{e^{2x}}\, dx + xe^x \int \frac{e^x \cdot 6x^{-3} e^x}{e^{2x}}\, dx = -e^x \int 6x^{-2}\, dx + xe^x \int 6x^{-3}\, dx = 3x^{-1} e^x.$$

Alternativt: u' og v' skal tilfredsstille ligningssystemet $u'y_1 + v'y_2 = 0$, $u'y_1' + v'y_2' = r$ som her blir $u' + xv' = 0$, $u' + (x+1)v' = 6x^{-3}$ etter forkorting med e^x. Det gir $v' = 6x^{-3}$ og $u' = -6x^{-2}$. Ved integrasjon følger $u = 6x^{-1}$ og $v = -3x^{-2}$, og dermed $y_p = 6x^{-1}e^x - 3x^{-2}xe^x = 3x^{-1}e^x$.

Oppgave 7 Gitt ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 6x_5 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= 0\ . \end{aligned}$$

Hvor mange frie variabler har ligningssystemet?

A: 1 **B:** 2 $\boxed{\textbf{C:}\ 3}$ **D:** 4

Vi Gausseliminerer for å bestemme antall ledervariabler.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 7 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-1)R_1+R_3]{(-2)R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Av echelonmatrisen følger at x_1 og x_4 er ledervariabler, og følgelig er x_2, x_3 og x_5 frie variabler.

Oppgave 8 Bestem redusert echelonform (redusert trappeform) for matrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{A:} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$ **B:** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **C:** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **D:** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Vi omformer matrisen, først til echelonform og deretter til redusert echelonform:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gausseliminasjon}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{eliminasjon}]{\text{GaussJordan–}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 9 Regn ut matriseproduktet $M^{-1}N$ når M og N er gitt ved

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad N = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

A: $\begin{bmatrix} 6 & -6 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ $\boxed{\textbf{B:} \begin{bmatrix} -6 & 6 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}}$ **C:** $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix}$ **D:** $\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

Ved å bruke formelen $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left[\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right]$ får vi

$$M^{-1} = -\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og følgelig} \quad M^{-1}N = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 10 For hvilke(n) k er matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & k \end{bmatrix}$$

inverterbar?

A: $k \neq 3$ **B:** $k = 1$ $\boxed{\textbf{C:} \ k \neq 1}$ **D:** $k > 3$

En kvadratisk matrise er inverterbar hvis og bare hvis determinanten er ulik null. Her er

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & -4 & k-5 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & k-5 \end{vmatrix} = 18(k-1) \neq 0 \iff k \neq 1.$$