TMA4110 Matematikk 3, eksamen 3. desember 2007

Løsningsforslag

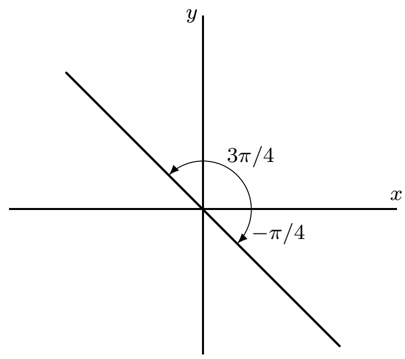
1 Hvis $z = re^{i\theta}$, så blir $\bar{z} = re^{-i\theta}$ og, for $z \neq 0$, $(\bar{z})^{-1} = r^{-1}e^{i\theta}$. Siden $i = e^{i\pi/2}$, får vi

$$iz(\bar{z})^{-1} = ire^{i\theta}r^{-1}e^{i\theta} = e^{i\pi/2}e^{2i\theta} = e^{i(\pi/2+2\theta)}.$$

Vi skal løse ligningen $iz = \bar{z}$. Vi har $z = 0$ eller $iz(\bar{z})^{-1} = 1$. Fra formelen over får vi $e^{i(\pi/2+2\theta)} = 1 = e^{(0+2\pi k)i}$ der k er heltall. Følgelig er $\pi/2 + 2\theta = 2\pi k$ slik at $\theta = -\pi/4 + \pi k$, $k = 0, 1$. Løsningen blir altså

$$z = re^{-i\pi/4} \quad \text{og} \quad z = re^{3\pi i/4}$$

som er en rett linje gjennom origo, se figuren.



Alternativt: Hvis $z = x + iy$ så er $\bar{z} = x - iy$, og ligningen $iz = \bar{z}$ blir $ix - y = x - iy$ som gir $y = -x$.

2 **a)** Vi skal finne en differensialligning $y'' + ay' + by = 0$ der $e^{(3/2)x}$ og $e^{(-1/2)x}$ er løsninger. Hvis $e^{(3/2)x}$ er en løsning av $y'' + ay' + by = 0$, så er $(3/2)^2 + (3/2)a + b = 0$. På samme måte er $(-1/2)^2 + (-1/2)a + b = 0$. Vi får et ligningssystem

$$\begin{aligned} 3a + 2b &= -9/2 \\ -a + 2b &= -1/2. \end{aligned}$$

Det har entydig løsning $a = -1$, $b = -3/4$.

Alternativt: Hvis $e^{(3/2)x}$ og $e^{(-1/2)x}$ er løsninger til differensialligningen $y'' + ay' + by = 0$, så har den karakteristiske ligningen $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ to reelle røtter $\lambda_1 = 3/2$ og $\lambda_2 = -1/2$. Da må vi ha

$$\lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - 3/2)(\lambda + 1/2) = \lambda^2 - \lambda - 3/4.$$

Det gir $a = -1$ og $b = -3/4$.

b) Vi skal løse initialverdiproblemet $y'' - 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$. Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ har røtter $\lambda_1 = 2 + i$ og $\lambda_2 = 2 - i$. Generell løsning av differensialligningen blir $y = c_1e^{2x}\cos x + c_2e^{2x}\sin x$. Da er

$$y' = 2c_1e^{2x}\cos x - c_1e^{2x}\sin x + 2c_2e^{2x}\sin x + c_2e^{2x}\cos x,$$

og initialbetingelsene gir

$$c_1 = 1, \quad 2c_1 + c_2 = 4.$$

Løsningen til initialverdiproblemet er følgelig $y = e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x$.

c) Vi løser først den homogene ligningen $y'' - 2y' - 15y = 0$. Røttene til den karakteristiske ligningen er $1 \pm \sqrt{16}$ som blir $\lambda_1 = 5$ og $\lambda_2 = -3$. Generell løsning er $y_h = c_1e^{5x} + c_2e^{-3x}$.

Så skal vi finne en partikulær løsning av ligningen $y'' - 2y' - 15y = e^{5x} - 17\cos 3x$. Vi bruker ubestemte koeffisenters metode som gir $y_p = Axe^{5x} + B\cos 3x + C\sin 3x$. Utregning gir

$$y_p'' - 2y_p' - 15y_p = 8Ae^{5x} + (-24B - 6C)\cos 3x + (6B - 24C)\sin 3x.$$

Vi får $8A = 1$, $24B + 6C = 17$ og $6B - 24C = 0$. Det gir $A = 1/8$, $B = 4/6$ og $C = 1/6$. En generell løsning er følgelig

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-3x} + \tfrac{1}{8} x e^{5x} + \tfrac{2}{3} \cos 3x + \tfrac{1}{6} \sin 3x.$$

3 Vi har gitt en løsning $y_1 = \sin x$ av ligningen $y'' + 2(\tan x)y' - y = 0$ og skal finne en annen løsning $y_2 = uy_1$. Ved innsetting får vi en differensialligning for u:

$$u'' \sin x + u'(2\cos x + 2\tan x \sin x) = 0.$$

Vi omformer til

$$\frac{u''}{u'} = -2\frac{\cos x}{\sin x} - 2\frac{\sin x}{\cos x} \qquad \left(\text{evt. } \frac{u''}{u'} = \frac{-2}{\sin x \cos x}\right),$$

og ved integrasjon får vi

$$\ln |u'| = -2\ln|\sin x| + 2\ln|\cos x| \qquad \big(\text{evt. } \ln|u'| = -2\ln|\tan x|\big).$$

Dermed er $u' = \pm \cos^2 x / \sin^2 x$ og, ved den oppgitte integrasjonsformelen,

$$u = \pm\left(-\frac{\cos x}{\sin x} - x + C\right).$$

Én løsning er $y_2 = -\cos x - x \sin x$.

4 Vi har

$$\begin{aligned} T_1 &= \tfrac{1}{4}(60 + 100 + T_2 + T_3) \\ T_2 &= \tfrac{1}{4}(T_1 + 100 + 40 + T_4) \\ T_3 &= \tfrac{1}{4}(60 + T_1 + T_4 + 0) \\ T_4 &= \tfrac{1}{4}(T_3 + T_2 + 40 + 0) \end{aligned} \quad \text{dvs.} \quad \begin{aligned} 4T_1 - T_2 - T_3 \phantom{{}- T_4} &= 160 \\ -T_1 + 4T_2 - T_4 &= 140 \\ -T_1 + 4T_3 - T_4 &= 60 \\ -T_2 - T_3 + 4T_4 &= 40. \end{aligned}$$

Gausseliminasjon, der vi allerede har byttet om radene 1 og 3 og radene 2 og 4, gir

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 4 & -1 & 60 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 40 \\ 4 & -1 & -1 & 0 & 160 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 140 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)R_1+R_4]{(4)R_1+R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 4 & -1 & 60 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 40 \\ 0 & -1 & 15 & -4 & 400 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 80 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(4)R_2+R_4]{(-1)R_2+R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 4 & -1 & 60 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 40 \\ 0 & 0 & 16 & -8 & 360 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & 240 \end{array}\right] \xrightarrow{(\frac{1}{2})R_3+R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 4 & -1 & 60 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 40 \\ 0 & 0 & 16 & -8 & 360 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 420 \end{array}\right].$$

Ved tilbakesubstitusjon får vi

$$\begin{aligned} T_4 &= 420/12 = 35 \\ T_3 &= (360 + 8T_4)/16 = 40 \\ T_2 &= -(40 + T_3 - 4T_4) = 60 \\ T_1 &= -(60 - 4T_3 + T_4) = 65. \end{aligned}$$

Temperaturen i punktene P_1 til P_4 er altså $T_1 = 65°$, $T_2 = 60°$, $T_3 = 40°$ og $T_4 = 35°$.

5 Ligningen

$$c_1\mathbf{w_1} + c_2\mathbf{w_2} + c_3\mathbf{w_3} = \mathbf{0}$$

gir, ved innsetting av $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$, $\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$,

$$(c_1 + c_2)\mathbf{v_1} + (c_1 + c_3)\mathbf{v_2} + (c_2 + c_3)\mathbf{v_3} = \mathbf{0}.$$

Siden $\mathbf{v_1}$,$\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ er lineært uavhengige, følger

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 + c_3 = 0, \quad c_2 + c_3 = 0.$$

Vi får $c_2 = -c_1$ og $c_3 = -c_1$ som innsatt i siste ligning gir $c_1 = 0$. Eneste løsning er følgelig $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, og vektorene $\mathbf{w_1}$, $\mathbf{w_2}$, $\mathbf{w_3}$ er lineært uavhengige.

6 **a)** Vi kan løse ligningssystemet ved Gauss–Jordaneliminasjon:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[(\frac{1}{2})R_2]{(1)R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Med $x_3 = s$ og $x_4 = t$ får vi $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (s-2t, s-t, s, t) = s(1, 1, 1, 0)+t(-2, -1, 0, 1)$. En basis for løsningsrommet er følgelig vektorene $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 0)$ og $\mathbf{u}_2 = (-2, -1, 0, 1)$.

b) Vi skal finne den ortogonale projeksjonen $\mathbf{p}$ av $\mathbf{b} = (1, 2, -3, 1)$ inn i underrommet $V = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Siden $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 1, 0)$ og $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -1, 2)$ er ortogonale, får vi

$$\mathbf{p} = \left(\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}_1}{\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 + \left(\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}_2}{\mathbf{v_2}\cdot\mathbf{v}_2}\right)\mathbf{v}_2 = -\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

c) Vektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er radene i koeffisientmatrisen A til ligningssystemet i **a)**. Følgelig må $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ være i det ortogonale komplementet $\operatorname{Row}(A)^\perp$. Siden $\operatorname{Row}(A)^\perp = \operatorname{Null}(A)$, kan vi finne $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ ved å bruke Gram–Schmidts ortogonaliseringsalgoritme på basisen $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 0)$ og $\mathbf{u}_2 = (-2, -1, 0, 1)$ for $\operatorname{Null}(A)$:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 0), \qquad \mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_2 - \left(\frac{\mathbf{u_2}\cdot\mathbf{v}_3}{\mathbf{v_3}\cdot\mathbf{v}_3}\right)\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektorene $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -1, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 0)$ og $\mathbf{v}_4 = (-1, 0, 1, 1)$ er følgelig en ortogonal basis for $\mathbb{R}^4$.

7 **a)** Egenverdiene:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 10-\lambda & -9 \\ 6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \quad \text{gir} \quad \lambda_1 = 4 \text{ og } \lambda_2 = 1.$$

Egenvektorene:

$$\lambda_1 = 4: \qquad A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 6 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = t\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},\ t \neq 0; \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1: \qquad A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \neq 0; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En generell løsning av differensialligningssystemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ er

$$\mathbf{y} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2} \quad \text{dvs.} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 e^{4t}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Vi har $A = PDP^{-1}$ for

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Setter vi

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = PKP^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

får vi $B^2 = PK^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$.