**NTNU**
Institutt for matematiske fag

# TMA4110/4115 Matematikk 3
# eksamen 18. august 2007

**Løsningsforslag**

**1** Når $z = re^{i\theta}$, er $z^3 = r^3 e^{3i\theta}$ og $\bar{z} = re^{-i\theta}$. Den gitte ligningen kan følgelig skrives

$$r^3 e^{3i\theta} = 5re^{-i\theta}.$$

Da er $r^3 = 5r$, og vi får $r = 0$ eller $r = \sqrt{5}$ (siden $r \geq 0$). For $r = 0$ har vi løsningen $z = 0$, og for $r = \sqrt{5}$ får vi $e^{3i\theta} = e^{-i\theta}$. Da er $3\theta = -\theta + 2k\pi$ der $k$ er heltallig. Vi får $\theta = k\pi/2$ og $k = 0, 1, 2$ og 3 gir de forskjellige verdiene til $z$ (for $r = \sqrt{5}$). Den gitte ligningen har følgelig til sammen 5 løsninger: $z = 0$ og $z = \sqrt{5}\, e^{k\pi i/2}$ for $k = 0, 1, 2$ og 3, altså

$$z = 0,\ z = \sqrt{5}\,,\ z = \sqrt{5}\, e^{\pi i/2} = \sqrt{5}\, i,\ z = \sqrt{5}\, e^{\pi i} = -\sqrt{5}\ \text{ og }\ z = \sqrt{5}\, e^{3\pi i/2} = -\sqrt{5}\, i.$$

**2** **a)** Ligningen $y'' - 2y' + 5y = 0$ har karakteristisk ligning $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ med røtter $\lambda = 1 \pm 2i$. Generell løsning blir da

$$y = e^x (A \cos 2x + B \sin 2x).$$

Initialbetingelsen $y(0) = 0$ gir $A = 0$. Dermed er $y' = Be^x(\sin 2x + 2\cos 2x)$, og initialbetingelsen $y'(0) = 4$ gir $B = 2$. Løsningen på initialverdiproblemet blir følgelig

$$y = 2e^x \sin 2x.$$

**b)** Den homogene ligningen $y'' + y' - 12y = 0$ har karakteristisk ligning $\lambda^2 + \lambda - 12 = 0$ med røtter $\lambda_1 = 3$ og $\lambda_2 = -4$ og dermed generell løsning $y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-4x}$. Den inhomogene ligningen $y'' + y' - 12y = 7e^{-4x}$ har da en partikulær løsning på formen $y_p = Axe^{-4x}$. Vi får $y_p'' + y_p - 12y_p = -7Ae^{-4x}$ så $y_p$ er løsning hvis $-7A = 7$ som gir $A = -1$. En generell løsning av $y'' + y' - 12y = 7e^{-4x}$ er følgelig

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-4x} - xe^{-4x}.$$

**c)** Vi kan finne en partikulær løsning av ligningen $y'' - 2y/x^2 = x^2$ for $x > 0$ ved å bruke metoden med variasjon av parametre. Den homogene ligningen kan skrives $x^2 y'' - 2y = 0$ og er en Euler–Cauchyligning. Vi finner en basis for løsningene ved å sette inn $y = x^m$:

$$x^2 (x^m)'' - 2(x^m) = x^m [m(m-1) - 2] = x^m \left[m^2 - m - 2\right] = 0.$$

Andregradsligningen $m^2 - m - 2 = 0$ har røtter $m_1 = 2$ og $m_2 = -1$, og følgelig er $y_1 = x^2$ og $y_2 = x^{-1}$ en basis for løsningene av den homogene ligningen. Wronskideterminanten er $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = -3$, og med høyreside $r(x) = x^2$ får vi en partikulær løsning

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W}\, dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W}\, dx = \frac{x^2}{3} \int x\, dx - \frac{1}{3x} \int x^4\, dx = \frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{15} = \frac{x^4}{10}.$$

**3** **a)** Vi løser ligningssystemet ved å omforme koeffisientmatrisen til (redusert) echelonform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -10 \\ 0 & -3 & -6 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ledervariablene er $x_1$ og $x_2$ mens $x_3$ og $x_4$ er de frie variablene. Setter vi $x_3 = s$ og $x_4 = t$, blir løsningen av ligningssystemet gitt ved

$$x_1 = -s, \quad x_2 = -2s - 2t, \quad x_3 = s, \quad x_4 = t, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

**b)** Matrisen $A$ er koeffisientmatrisen til ligningssystemet i a). Basiser for Row($A$) og Col($A$) finner vi ved hjelp av echelonmatrisen i a):

$$\begin{aligned} \text{Row}(A): &\quad \{(1,0,1,0),(0,1,2,2)\}, \\ \text{Col}(A): &\quad \{(1,3,4),(1,-2,1)\}. \end{aligned}$$

Fra a) har vi også løsningen $\mathbf{x} = (-s, -2s-2t, s, t) = s(-1,-2,1,0) + t(0,-2,0,1)$ av det homogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. En basis for Null($A$) er følgelig

$$\{(-1,-2,1,0),(0,-2,0,1)\}.$$

En vektor $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ er i $\text{Col}(A)^\perp$ hvis $\mathbf{y} \cdot (1,3,4) = 0$ og $\mathbf{y} \cdot (1,-2,1) = 0$. Ligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_2 + 4y_3 &= 0 \\ y_1 - 2y_2 + \phantom{4}y_3 &= 0 \end{aligned}$$

gir $y_1 = -\frac{11}{5}y_3$ og $y_2 = -\frac{3}{5}y_3$. Setter vi $y_3 = -5t$, blir $(y_1, y_2, y_3) = t(11, 3, -5)$. Vektoren $(11, 3, -5)$ er følgelig en basis for $\text{Col}(A)^\perp$. (Det ortogonale komplementet $\text{Col}(A)^\perp$ er altså endimensjonalt, det stemmer med $\dim \text{Col}(A) + \dim \text{Col}(A)^\perp = 3$.)

**4** **a)** Vi regner ut determinanten til $A$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1.$$

$A$ er inverterbar hvis og bare hvis $|A| \neq 0$. Siden $a$ skal være reell, blir det for alle $a \neq -1$.

**b)** Med $a = 1$ får vi

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Følgelig er

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alternativt kan vi regne ut kofaktorene

$$\begin{aligned} A_{11} &= 1, & A_{12} &= 1, & A_{13} &= -1, \\ A_{21} &= -1, & A_{22} &= 1, & A_{23} &= 1, \\ A_{31} &= 1, & A_{32} &= -1, & A_{33} &= 1, \end{aligned}$$

og bruke den adjungerte matrisen $\text{adj}\, A = [A_{ij}]^T$ til å finne $A^{-1}$:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}\, A}{|A|} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**5** **a)** Egenverdiene:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 0.8-\lambda & 0.1 \\ 0.2 & 0.9-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (1.7)\lambda + 0.7 = 0 \quad \text{gir} \quad \lambda_1 = 1 \text{ og } \lambda_2 = 0.7\,.$$

Egenvektorene:

$$\lambda_1 = 1: \qquad A-\lambda_1 I = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0.2 & -0.1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ t \neq 0; \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0.7: \qquad A-\lambda_2 I = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \neq 0; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi har $A = PDP^{-1}$ for

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

**b)** Lar vi $p_k$ og $q_k$ være antall innbyggere i sentrum og i forstedene etter $k$ år, har vi

$$\begin{bmatrix} p_{k+1} \\ q_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.8)p_k + (0.1)q_k \\ (0.2)p_k + (0.9)q_k \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} p_k \\ q_k \end{bmatrix} \qquad \text{slik at} \qquad \begin{bmatrix} p_k \\ q_k \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \end{bmatrix}.$$

Vi skal finne $p_k$ og $q_k$ for store $k$. Siden $A^k = PD^kP^{-1}$ og $(0.7)^k \to 0$ når $k \to \infty$, får vi, for store $k$,

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.7)^k \end{bmatrix} \left(\tfrac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \approx \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Da blir

$$\begin{bmatrix} p_k \\ q_k \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \end{bmatrix} \approx \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

slik at på lang sikt vil det i sentrum bli 4 og i forstedene 8 millioner innbyggere.

Alternativt kan vi utnytte at $A$ er en stokastisk matrise med bare positive elementer. Da vil, når $k \to \infty$, $A^k$ nærme seg mot $\begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{u} \end{bmatrix}$ der de to (identiske) kolonnevektorene er egenvektoren med elementsum 1 som tilhører egenverdien $\lambda = 1$. Fra a) får vi $\mathbf{u} = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right)$, og følgelig er, for store $k$,

$$\begin{bmatrix} p_k \\ q_k \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

**6** Det gitte differensialligningsystemet kan skrives $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ der $A$ er den oppgitte matrisen og $\mathbf{x} = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$. Vi regner først ut egenvektorene til matrisen $A$.

$$\lambda = 1: \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ t \neq 0$$

$$\lambda = 3: \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ (s,t) \neq (0,0).$$

Vi får tre lineært uavhengige egenvektorer $\mathbf{v}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (-1,1,0)$ og $\mathbf{v_3} = (1,0,1)$ med tilhørende egenverdier $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$. Generell løsning av $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ er da gitt ved

$$\mathbf{x} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2} + c_3 e^{\lambda_3 t}\mathbf{v_3} = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Initialbetingelsene $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $x_3(0) = 1$ gir det inhomogene ligningssystemet

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 + c_3 &= 1 \\ c_1 + c_2 \phantom{{}+c_3} &= 2 \\ c_3 &= 1 \end{aligned}$$

til bestemmelse av konstantene $c_1$, $c_2$ og $c_3$. Vi får $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, og løsningen som oppfyller initialbetingelsene er

$$x_1(t) = e^t, \quad x_2(t) = e^t + e^{3t}, \quad x_3(t) = e^{3t}.$$

$\boxed{7}$ Hvis $\mathbf{c}$ er en vektor i $\mathrm{Col}(B)$, så fins en vektor $\mathbf{x}$ slik at $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$. Da får vi

$$A\mathbf{c} = AB\mathbf{x} = \mathit{0}\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Følgelig er $\mathbf{c}$ i $\mathrm{Null}(A)$ slik at $\mathrm{Col}(B)$ er inneholdt i $\mathrm{Null}(A)$.

Når $\mathrm{Col}(B)$ er underrom i $\mathrm{Null}(A)$, så er $\dim \mathrm{Col}(B) \leq \dim \mathrm{Null}(A)$. Siden vi vet at $\dim \mathrm{Col}(B) = \mathrm{rang}(B)$ og at $\dim \mathrm{Null}(A) = n - \mathrm{rang}(A)$, så følger $\mathrm{rang}(B) \leq n - \mathrm{rang}(A)$ dvs.

$$\mathrm{rang}(A) + \mathrm{rang}(B) \leq n.$$