NTNU

Institutt for matematiske fag

TMA4115 Matematikk 3
eksamen 2. juni 2008

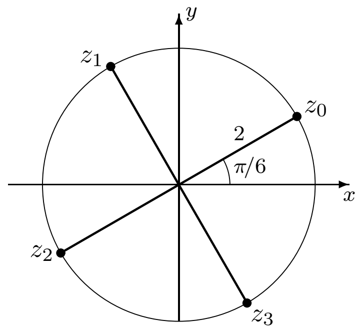
Løsningsforslag

1 For $w = -8 + 8i\sqrt{3}$ er $r = |w| = 8\sqrt{1+3} = 16$, og $\theta = \operatorname{Arg} w = \pi + \arctan(-\sqrt{3})$ siden w ligger i andre kvadrant. Vi har $\arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/3$, og følgelig er $\theta = 2\pi/3$ og

$$w = re^{i\theta} = 16e^{i(2\pi/3)} = 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Fjerderøttene til w er da gitt ved $z_k = 16^{1/4}e^{i(2\pi/3+2k\pi)/4}$ for $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$. Vi får altså

$$\begin{aligned}
z_0 &= 2e^{\pi i/6} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i\\
z_1 &= 2e^{2\pi i/3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + i\sqrt{3}\\
z_2 &= 2e^{7\pi i/6} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i\\
z_3 &= 2e^{5\pi i/3} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}\,.
\end{aligned}$$



2 **a)** Karakteristisk ligning for differensialligningen $y'' + 4y' + 5y = 0$ er $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ med røtter $\lambda = -2 \pm i$. Generell løsning av differensialligningen er følgelig

$$y = c_1e^{-2x}\cos x + c_2e^{-2x}\sin x.$$

Av initialbetingelsene $y(0) = 1$ og $y'(0) = 2$ følger $c_1 = 1$ og $-2c_1 + c_2 = 2$ som gir $c_2 = 4$. Løsningen av initialverdiproblemet er altså

$$y = e^{-2x}\cos x + 4e^{-2x}\sin x = e^{-2x}\left(\cos x + 4\sin x\right).$$

b) Ifølge ubestemte koeffisienters metode har ligningen $y'' + 4y' + 5y = 4\cos x + 5x$ en partikulær løsning av formen

$$y_p = A\cos x + B\sin x + Cx + D$$

siden verken $\cos x$ eller x er løsning av den homogene ligningen. Innsetting gir

$$y_p'' + 4y_p' + 5y_p = (4A + 4B)\cos x + (-4A + 4B)\sin x + 5Cx + (4C + 5D),$$

og y_p er løsning hvis $4A + 4B = 4$, $-4A + 4B = 0$, $5C = 5$ og $4C + 5D = 0$. Det gir $A = B = \frac{1}{2}$, $C = 1$ og $D = -\frac{4}{5}$. En partikulær løsning er følgelig

$$y_p = \tfrac{1}{2}\cos x + \tfrac{1}{2}\sin x + x - \tfrac{4}{5}.$$

c) En generell løsning har formen $y = y_h + y_p$ der $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ og

$$y_p = -y_1\int\frac{y_2r}{W}\,dx + y_2\int\frac{y_1r}{W}\,dx.$$

Her er $r = x^2e^x/x = xe^x$ og $W = y_1y_2' - y_2y_1' = (x+1)e^x - e^x = xe^x$. Det gir

$$y_p = -(x+1)\int e^x\,dx + e^x\int(x+1)\,dx = -(x+1)e^x + e^x\left(\tfrac{1}{2}x^2 + x\right) = \tfrac{1}{2}x^2e^x - e^x.$$

En generell løsning er følgelig $y = c_1(x+1) + c_2e^x + \frac{1}{2}x^2e^x - e^x = c_1(x+1) + \widetilde{c}_2e^x + \frac{1}{2}x^2e^x$.

3 Underrommet $V = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ i $\mathbb{R}^4$ har dimensjon lik tre hvis vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige og dimensjon mindre enn tre hvis vektorene er lineært avhengige. Antall vektorer i en basis for V er altså alltid mindre enn eller lik tre, og svaralternativ **C** er riktig.

Normalsystemet $A^TA\bar{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$ blir her

$$\begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

med løsning $\bar{x} = -2$, $\bar{y} = 2$. Riktig svar er følgelig alternativ **A**. Vi kunne også funnet svaret ved å velge det alternativet der den totale kvadratfeilen

$$E^2 = |A\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}|^2 = (\bar{x} + \bar{y} - 5)^2 + (\bar{x} + 2\bar{y})^2 + (3\bar{x} + \bar{y} + 5)^2$$

blir minst. For de fire svaralternativene blir E^2 henholdsvis 30, 31.50, 35 og 31.25. Siden ett av alternativene skal være rett, må riktig svar være alternativ **A**.

4 **a)** Vi viser at E er den reduserte echelonmatrisen til A ved å omforme A til E ved hjelp av elementære radoperasjoner:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E$$

Basis for

$\text{Row}(A) : \{(1,0,1,0), (0,1,1,-1)\}$ (ikkenullradene i E)

$\text{Col}(A) : \{(1,-2,0,2), (1,3,1,-1)\}$ (kolonnene i A som tilsvarer pivotkolonnene i E).

b) I ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, der $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, ser vi fra E at x_1 og x_2 er ledervariabler, og at x_3 og x_4 følgelig er frie variabler. Vi setter $x_3 = s$ og $x_4 = t$, og får

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-s, -s+t, s, t) = s(-1,-1,1,0) + t(0,1,0,1), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Det inhomogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsning hvis og bare hvis $\mathbf{b}$ er i $\text{Col}(A)$. Da må vi ha $(1, 0, \alpha, \beta) = s(1,-2,0,2) + t(1,3,1,-1)$ for passende s og t. Det gir ligningene

$$1 = s + t, \quad 0 = -2s + 3t, \quad \alpha = t, \quad \beta = 2s - t.$$

Av de to første får vi $s = \frac{3}{5}$ og $t = \frac{2}{5}$. Setter vi det inn i de to siste, får vi $\alpha = \frac{2}{5}$ og $\beta = \frac{4}{5}$.

c) En ortogonal basis for $\text{Row}(A)$ får vi ved å bruke Gram-Schmidts algoritme på basisvektorene $\mathbf{u}_1 = (1,0,1,0)$ og $\mathbf{u}_2 = (0,1,1,-1)$:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u_1} = (1,0,1,0)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{u_2} - \left(\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = (-1, 2, 1, -2)$$

Siden $\text{Row}(A)^\perp = \text{Null}(A)$, får vi en ortogonal basis for $\text{Row}(A)^\perp$ ved å bruke Gram-Schmidt på vektorene i en basis for $\text{Null}(A)$. Fra løsningen av systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ser vi at vektorene $\mathbf{u}_3 = (-1,-1,1,0)$ og $\mathbf{u}_4 = (0,1,0,1)$ utgjør en basis for $\text{Null}(A)$. Det gir

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u_3} = (-1,-1,1,0)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_4 = \mathbf{u_4} - \left(\frac{\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3}\right)\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = (-1, 2, 1, 3).$$

Vektorene $\mathbf{v}_1 = (1,0,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (-1,2,1,-2)$, $\mathbf{v}_3 = (-1,-1,1,0)$, $\mathbf{v}_4 = (-1,2,1,3)$ er altså en ortogonal basis for $\mathbb{R}^4$ med $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i Row(A) og $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ i Row$(A)^\perp$.

5 **a)** Den karakteristiske ligningen $\det(A-\lambda I)=0$ blir her

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & -2 \\ -2 & -3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0.$$

Følgelig har A egenverdiene $\lambda_1=\lambda_2=1$ og $\lambda_3=-1$. Vi regner så ut egenvektorene:

$$\lambda = 1: \quad A-\lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ (s,t)\neq(0,0)$$

$$\lambda = -1: \quad A-\lambda I = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ t\neq 0$$

Vi får tre lineært uavhengige egenvektorer $\mathbf{v}_1=(1,0,1)$, $\mathbf{v}_2=(-2,1,0)$ og $\mathbf{v_3}=(-1,1,0)$ med tilhørende egenverdier $\lambda_1=\lambda_2=1$ og $\lambda_3=-1$. Da er $A=PDP^{-1}$ når P og D er matrisene

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Når $A=PDP^{-1}$, er $A^k = PD^kP^{-1}$. Her er

$$D^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{bmatrix} = \begin{cases} D & \text{når } k \text{ er oddetall} \\ I & \text{når } k \text{ er partall.} \end{cases}$$

Følgelig får vi

$$A^{1729} = PD^{1729}P^{-1} = PDP^{-1} = A \qquad \text{og} \qquad A^{2008} = PD^{2008}P^{-1} = PIP^{-1} = I.$$

c) Det gitte differensialligningsystemet kan skrives $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ der A er den oppgitte matrisen og $\mathbf{y} = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$. Siden $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ er tre lineært uavhengige egenvektorer for A, er generell løsning av $\mathbf{y}'=A\mathbf{y}$ gitt ved

$$\mathbf{y} = c_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1} + c_2e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2} + c_3e^{\lambda_3 t}\mathbf{v_3} = c_1e^t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2e^t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3e^{-t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Initialbetingelsen $y_1(0)=1$, $y_2(0)=1$, $y_3(0)=1$ gir det inhomogene ligningssystemet

$$\begin{aligned} c_1 - 2c_2 - c_3 &= 1 \\ c_2 + c_3 &= 1 \\ c_1 \qquad\qquad &= 1 \end{aligned}$$

til bestemmelse av konstantene c_1, c_2 og c_3. Vi får $c_1=1$, $c_2=-1$ og $c_3=2$, og løsningen som oppfyller initialbetingelsen er

$$\mathbf{y} = e^t\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-t}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{dvs.} \qquad \begin{aligned} y_1(t) &= 3e^t - 2e^{-t} \\ y_2(t) &= -e^t + 2e^{-t} \\ y_3(t) &= e^t. \end{aligned}$$

6 For en stokastisk $n \times n$-matrise $M = [a_{ij}]$ har vi

$$M^T = [a_{ji}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + \cdots + a_{n1} \\ \vdots \\ a_{1n} + \cdots + a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Følgelig er $\mathbf{v} = (1, 1, \ldots, 1)$ en egenvektor for M^T med tilhørende egenverdi $\lambda = 1$.

Hvis A og B er stokastiske $n \times n$-matriser og $\mathbf{v} = (1, 1, \ldots, 1)$, har vi følgelig

$$(AB)^T \mathbf{v} = B^T A^T \mathbf{v} = B^T \mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

Det viser at $\mathbf{v} = (1, 1, \ldots, 1)$ er en egenvektor for $(AB)^T$ med egenverdien $\lambda = 1$. Det betyr at summen av elementene i hver rad i $(AB)^T$ er lik 1. Dermed er summen av elementene i hver kolonne i AB lik 1, og AB er stokastisk siden elementene i AB også er ikkenegative når elementene i A og B er det.

Alternativt: I produktmatrisen $C = AB$ er elementene gitt ved

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \qquad 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n.$$

Siden alle elementene a_{ik} og b_{kj} er ikkenegative, blir også $c_{ij} \geq 0$. For summen av elementene i kolonne j i $C = AB$ får vi

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \Big) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \Big) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \Big) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} = 1$$

siden $\sum_{i=1}^{n} a_{ik} = 1$ og $\sum_{k=1}^{n} b_{kj} = 1$ når A og B er stokastiske matriser.