NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4115 Matematikk 3
eksamen 21. mai 2007

Løsningsforslag

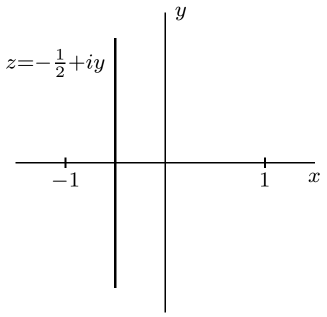
1 Setter vi inn $z = x + iy$, får vi

$$|x + iy| = |(x + 1) + iy|$$

dvs.

$$x^2 + y^2 = (x^2 + 2x + 1) + y^2.$$

Det gir $x = -\frac{1}{2}$ og $z = -\frac{1}{2} + iy$.



For å løse ligningen $z^4 = (z + 1)^4$ kan vi skrive den på formen

$$w^4 = 1 \qquad \text{der} \qquad w = \frac{z}{z+1}.$$

Vi får $w = \pm 1,\ \pm i$ og $z = w/(1 - w),\ (w \neq 1)$. Det gir løsningene

$$z_0 = -1/(1 + 1) = -\tfrac{1}{2}, \quad z_1 = i/(1 - i) = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i \quad \text{og} \quad z_2 = -i/(1 + i) = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i.$$

Vi legger merke til at alle løsningene har realdel $-\frac{1}{2}$. Det stemmer med første del av oppgaven siden alle løsningene oppfyller $|z| = |z + 1|$. En alternativ løsningsmåte får vi ved å skrive ligningen på formen $(z + 1)^4 - z^4 = 0$ og så faktorisere venstre side ved hjelp av tredje kvadratsetning:

$$(z + 1)^4 - z^4 = \big((z + 1)^2 - z^2\big)\big((z + 1)^2 + z^2\big) = (2z + 1)(2z^2 + 2z + 1).$$

Da er løsningene gitt ved $2z + 1 = 0$ og $2z^2 + 2z + 1 = 0$. Det gir $z = -\frac{1}{2}$ og $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$.

2 **a)** Karakteristisk ligning for differensialligningen $y'' + 2y' + y = 0$ er $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ med dobbelrot $\lambda = -1$. Generell løsning av differensialligningen er følgelig

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}.$$

Av initialbetingelsene $y(0) = 2$ og $y'(0) = 3$ følger $c_1 = 2$ og $-c_1 + c_2 = 3$ som gir $c_2 = 5$. Løsningen av initialverdiproblemet er altså

$$y = 2e^{-x} + 5xe^{-x}.$$

b) I differensialligningen $y'' + 2y' + y = x + 2e^{-x}$ er den homogene ligningen løst i a):

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}.$$

Ifølge ubestemte koeffisienters metode har den inhomogene ligningen en partikulær løsning av formen

$$y_p = Ax + B + Cx^2 e^{-x}.$$

Da er $y_p'' + 2y_p' + y_p = Ax + 2A + B + 2Ce^{-x}$, og y_p er løsning hvis $A = 1$, $2A + B = 0$ og $2C = 2$. Det gir $A = 1$, $B = -2$ og $C = 1$. En partikulær løsning er følgelig $y_p = x - 2 + x^2 e^{-x}$, og generell løsning blir

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + x^2 e^{-x} + x - 2.$$

3 **a)** Vi kan finne en partikulær løsning av ligningen $x^2y'' - 4xy' + 4y = x^4$ for $x > 0$ ved å bruke metoden med variasjon av parametre. Den homogene ligningen $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$ er en Cauchy–Eulerligning, og vi finner en basis for løsningene ved å sette inn $y = x^m$:

$$x^2 (x^m)'' - 4x (x^m)' + 4 (x^m) = x^m [m(m-1) - 4m + 4] = x^m \left[m^2 - 5m + 4\right] = 0.$$

Andregradsligningen $m^2 - 5m + 4 = 0$ har røtter $m_1 = 1$ og $m_2 = 4$, og følgelig er $y_1 = x$ og $y_2 = x^4$ en basis for løsningene av den homogene ligningen. Wronskideterminanten er $W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_2y_1' = 3x^4$, og med høyreside $r(x) = x^4/x^2 = x^2$ får vi

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W}\,dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W}\,dx = -\frac{x}{3}\int x^2\,dx + \frac{x^4}{3}\int \frac{1}{x}\,dx = -\frac{x^4}{9} + \frac{x^4}{3}\ln x.$$

Siden $-\frac{1}{9}x^4$ er løsning av den homogene ligningen, vil et enklere svar være $y_p = \frac{1}{3}x^4 \ln x$.

b) Setter vi $y'' + 4y = z$, kan den gitte ligningen skrives $z'' = z$, dvs. $z'' - z = 0$. Den har generell løsning

$$z = c_1e^x + c_2e^{-x}.$$

Deretter finner vi y ved å løse den inhomogene ligningen $y'' + 4y = c_1e^x + c_2e^{-x}$. Homogen løsning er $y_h = c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$, og en partikulær løsning har formen $y_p = Ae^x + Be^{-x}$. Vi får $y_p'' + 4y_p = 5Ae^x + 5Be^{-x}$ så y_p er løsning hvis $5A = c_1$ og $5B = c_2$. Følgelig er $y_p = \frac{1}{5}c_1e^x + \frac{1}{5}c_2e^{-x}$, og generell løsning av den gitte ligningen blir

$$\begin{aligned} y = y_h + y_p &= c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x + \tfrac{1}{5}c_1e^x + \tfrac{1}{5}c_2e^{-x} \\ &= \tilde{c}_1e^x + \tilde{c}_2e^{-x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x \qquad (\tilde{c}_1 = \tfrac{1}{5}c_1,\ \tilde{c}_2 = \tfrac{1}{5}c_2). \end{aligned}$$

4 **a)** Vi løser systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ved Gauss-Jordaneliminasjon:

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & -2 & -4 & -2 \\ -2 & -4 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & -6 & -6 & -3 & -9 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & -9 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Med $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ er x_1, x_2 og x_4 ledervariabler og x_3 og x_5 følgelig frie variabler. Setter vi $x_3 = s$ og $x_5 = t$, får vi generell løsning

$$\mathbf{x} = (s + t, -s - t, s, 1 - t, t) = s(1, -1, 1, 0, 0) + t(1, -1, 0, -1, 1) + (0, 0, 0, 1, 0),\ \ s, t \in \mathbb{R}.$$

(En løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er altså $(0, 0, 0, 1, 0)$, det stemmer med at $\mathbf{b}$ er fjerde kolonne i A.)

b) Det homogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har løsning $\mathbf{x} = s(1, -1, 1, 0, 0) + t(1, -1, 0, -1, 1)$ og en basis for $\mathrm{Null}(A)$ er følgelig

$$\{(1, -1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, -1, 1)\}.$$

Basiser for $\mathrm{Col}(A)$ og $\mathrm{Row}(A)$ finner vi ved hjelp av echelonmatrisen (uten den siste kolonnen) i a):

$$\begin{aligned} \mathrm{Col}(A):&\quad \{(1, -2, -2, 0), (-1, -4, -1, 1), (-2, 1, -2, 0)\} \\ \mathrm{Row}(A):&\quad \{(1, 0, -1, 0, -1), (0, 1, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Andre svar er også mulige.

5 **a)** Vi skal finne en ortogonal basis for underrommet V i $\mathbb{R}^4$ som er utspent av vektorene $\mathbf{v}_1 = (1,0,1,-1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1,1,0,1)$ og $\mathbf{v}_3 = (1,1,0,1)$. Gram-Schmidts algoritme gir

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v_1} = (1,0,1,-1),$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{v_2} - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = (-1,3,2,1),$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_3 = \mathbf{v_3} - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = (3,1,-1,2).$$

Litt enklere reging får vi ved å utnytte at $\mathbf{v_1}$ og $\mathbf{v_3}$ er ortogonale. Bruker vi Gram-Schmidt på basisen $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_3}$, $\mathbf{v_2}$, får vi

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v_1}, \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{v_3}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_3 = \mathbf{v_2} - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2}\mathbf{w}_2.$$

Det gir en ortogonal basis $\mathbf{w}_1 = (1,0,1,-1)$, $\mathbf{w}_2 = (1,1,0,1)$, $\mathbf{w}_3 = (-1,1,1,0)$ for V.

b) Den ortogonale projeksjonen $\mathbf{p}$ av $\mathbf{b} = (1,1,3,4)$ inn i V er gitt ved

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3}\mathbf{u}_3 = \tfrac{4}{5}\mathbf{u}_2 + \tfrac{3}{5}\mathbf{u}_3 = (1,3,1,2).$$

Vi kan også finne $\mathbf{p}$ uten å bruke en ortogonal basis for V. Setter vi $A = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{bmatrix}$, er $\mathbf{p} = A\bar{\mathbf{x}}$ der $\bar{\mathbf{x}}$ er minste kvadraters løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Her blir

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Normalsystemet $A^TA\bar{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$ er altså $3\bar{x} - 2\bar{y} = 0$, $-2\bar{x} + 3\bar{y} + \bar{z} = 4$, $\bar{y} + 3\bar{z} = 6$ med løsning $\bar{\mathbf{x}} = (1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Det gir $\mathbf{p} = A\bar{\mathbf{x}} = (1,3,1,2)$, som ovenfor.

6 **a)** Ved å kofaktorutvikle determinanten $\left|A - \lambda I\right|$ langs første rad får vi

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -3-\lambda & 1 \\ -1 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\left[\lambda^2 + 2\lambda\right] + \lambda - \lambda = -\lambda(\lambda+1)(\lambda+2).$$

A har følgelig karakteristisk ligning $\lambda(\lambda+1)(\lambda+2) = 0$, og egenverdiene er 0, -1 og -2.

For hver egenverdi λ finner vi en egenvektor $\mathbf{v} = (x,y,z)$ ved å løse systemet $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ved Gausseliminasjon:

$$\lambda_1 = 0: \quad A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} z &= t \\ y &= 0 \\ x &= -y + z = t, \end{aligned} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1: \quad A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} z &= t \\ y &= z = t \\ x &= -2y + z = -t, \end{aligned} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -2: \quad A - \lambda_3 I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} z &= t \\ y &= z = t \\ x &= y - z = 0, \end{aligned} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Setter vi

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

er P inverterbar (kolonnene er lineært uavhengige siden de er egenvektorer for forskjellige egenverdier) og $A = PDP^{-1}$.

b) Med $\mathbf{x} = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ kan differensialligningssystemet skrives $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Bruker vi egenvektorene vi fant i a), er generell løsning gitt ved

$$\mathbf{x} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2} + c_3 e^{\lambda_3 t}\mathbf{v_3} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Initialbetingelsene $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1$, $x_3(0) = 2$ gir det inhomogene ligningssystemet

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 \phantom{{}+c_3} &= 1 \\ c_2 + c_3 &= -1 \\ c_1 + c_2 + c_3 &= 2 \end{aligned}$$

til bestemmelse av konstantene c_1, c_2, c_3. Vi får $c_1 = 1 + c_2$ fra første ligning og $c_3 = -1 - c_2$ fra den andre. Det gir, ved innsetting i tredje ligning, $c_2 = 2$. Dermed blir $c_1 = 3$ og $c_3 = -3$, og løsningen som oppfyller initialbetingelsen er

$$x_1(t) = 3 - 2e^{-t}, \quad x_2(t) = 2e^{-t} - 3e^{-2t}, \quad x_3(t) = 3 + 2e^{-t} - 3e^{-2t}.$$

$\boxed{7}$ Generelt gjelder at en vektor $\mathbf{b}$ er i kolonnerommet til en matrise M hvis og bare hvis systemet $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsning.

Hvis $\mathbf{b}$ er i $\mathrm{Col}(A)$, så har altså $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en løsning $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Da er $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ og siden $A = BC$, får vi $BC\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$. Det viser at $\mathbf{x} = C\mathbf{x}_0$ er en løsning av systemet $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$, og følgelig er $\mathbf{b}$ i $\mathrm{Col}(B)$. Altså må $\mathrm{Col}(A)$ være inneholdt i $\mathrm{Col}(B)$.

Hvis C er inverterbar, følger $B = AC^{-1}$, og med samme resonnement som ovenfor (med C^{-1} istedenfor C) følger at $\mathrm{Col}(B)$ er inneholdt i $\mathrm{Col}(A)$. Altså er $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Col}(B)$, og

$$\mathrm{rang}(A) = \dim \mathrm{Col}(A) = \dim \mathrm{Col}(B) = \mathrm{rang}(B).$$