Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 73 59 34 68/995 59 273

EKSAMEN I MATEMATIKK 3 (TMA4110/4115)

Bokmål
Torsdag 14. august 2008
Tid: 15.00 – 19.00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S) med tilhørende bruksanvisning
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 5. september 2008

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd. Hvert av de 12 punktene (1, 2abc, 3, 4ab, 5ab, 6ab, 7) teller likt ved sensuren.

Oppgave 1 Finn alle løsninger til likningen

$$z^3 - 2\bar{z}^2 = 0.$$

Oppgi svarene på polarform.

Oppgave 2

a) Løs initialverdiproblemet

$$y'' + 9y = 0, \quad y(\pi) = 2, \; y'(\pi) = -3.$$

b) Finn en partikulær løsning til differensiallikningen

$$y'' + 3y' - 10y = 7xe^{2x}.$$

c) Finn generell løsning til likningen

$$x^2y'' - 6y = x^3, \quad x > 0.$$

Oppgave 3 For hvilke verdier av a er matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a & 4 & 0 \\ 4 & a & 3 \\ 0 & 3 & a \end{bmatrix}$$

inverterbar?

Oppgave 4

a) Løs det lineære systemet

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ -4x_1 + x_2 - 9x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0. \end{aligned}$$

b) Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -9 & 5 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Finn en basis for hvert av underrommene $\mathrm{Col}(A)$, $\mathrm{Row}(A)$ og $\mathrm{Null}(A)$.

Oppgave 5

a) La matrisen A være gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vis at A har egenverdiene -1, 0 og 1.

Finn en matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

Regn ut A^{4115}.

b) La $x_1(t)$, $x_2(t)$ og $x_3(t)$ være deriverbare funksjoner. Løs initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} x_1' &= - x_2 + x_3 \\ x_2' &= -x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_3' &= -x_1 - 3x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

der $x_1(0) = 3$, $x_2(0) = 2$ og $x_3(0) = 4$.

Oppgave 6

a) La underrommet V av $\mathbb{R}^4$ være utspent av vektorene

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, -1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (2, 1, 0, -2) \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = (2, 0, -1, 2).$$

Bruk Gram-Schmidts algoritme til å finne en ortogonal basis for V.

b) Finn ortogonalprojeksjonen av $(1, 4, 4, 2)$ ned på underrommet V.

Oppgave 7 La A være en symmetrisk $n \times n$-matrise, og la $\mathbf{b}$ være en vektor i $\mathbb{R}^n$. Vis at det inhomogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsning hvis og bare hvis $\mathbf{b}$ er ortogonal til $\mathrm{Null}(A)$.