Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Instititutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 73 59 34 68 / 995 59 273
Marte Pernille Hatlo tlf. 73 59 16 98 / 975 37 854
Hans Jakob Rivertz tlf. 73 55 02 87 / 938 32 172

EKSAMEN I TMA4115 MATEMATIKK 3

Bokmål
Mandag 2. juni 2008
Kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S), med tilhørende bruksanvisning
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 24. juni 2008

Alle svar (unntatt på oppgave 3) skal begrunnes, og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd. Hvert av de 12 punktene (1, 2abc, 3, 4abc, 5abc, 6) teller likt ved sensuren.

Oppgave 1
Skriv det komplekse tallet $w = -8 + 8i\sqrt{3}$ på polarform, og bestem de fire fjerderøttene til w. Skriv fjerderøttene på formen $a + ib$ med eksakte verdier for a og b, og vis på en figur hvor de ligger i det komplekse plan.

Oppgave 2

a) Løs initialverdiproblemet

$$y'' + 4y' + 5y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

b) Finn en partikulær løsning av ligningen

$$y'' + 4y' + 5y = 4\cos x + 5x.$$

c) Det oppgis at $y_1 = x + 1$ og $y_2 = e^x$ er løsninger av ligningen $xy'' - (x+1)y' + y = 0$. Finn en generell løsning av den inhomogene ligningen

$$xy'' - (x+1)y' + y = x^2 e^x.$$

Oppgave 3 *Flervalgsoppgave, svar uten begrunnelse med ett alternativ på hvert spørsmål.*

La $V = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ være et underrom i $\mathbb{R}^4$. Hvor mange vektorer er det i en basis for V? (Hvilken påstand er alltid riktig?)

A: nøyaktig fire **B:** nøyaktig tre **C:** maksimalt tre **D:** minst tre

Oppgave 3 fortsetter på side 2

Hvilket av alternativene er minste kvadraters løsning $(\bar{x}, \bar{y})$ av ligningssystemet

$$x + y = 5, \quad x + 2y = 0, \quad 3x + y = -5\,?$$

A: $(-2, 2)$ **B:** $(-2, 3/2)$ **C:** $(-1, 1)$ **D:** $(-3/2, 3/2)$

Oppgave 4 Matrisene A og E og vektoren $\mathbf{b}$ er gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

a) Vis at E er den reduserte echelonmatrisen til A.
Angi en basis for radrommet $\mathrm{Row}(A)$ og for kolonnerommet $\mathrm{Col}(A)$.

b) Bestem løsningsmengden til det homogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
For hvilke tall α og β har det inhomogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ løsning?

c) Bestem en *ortogonal* basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ for $\mathrm{Row}(A)$, og finn vektorer $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ i $\mathrm{Row}(A)^{\perp}$ slik at vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ danner en ortogonal basis for $\mathbb{R}^4$.

Oppgave 5

a) Vis at matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

har egenverdiene 1 og -1. Finn en matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

b) Beregn matrisepotensene A^{1729} og A^{2008}.

c) Løs differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + 4y_2 - 2y_3 \\ y_2' &= -2y_1 - 3y_2 + 2y_3 \\ y_3' &= y_3 \end{aligned}$$

med initialbetingelse $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 1$.

Oppgave 6 En kvadratisk matrise er *stokastisk* hvis alle elementene er ikkenegative og summen av elementene i hver kolonne er lik 1.

Gjør rede for at hvis M er en stokastisk $n \times n$-matrise, så er n-vektoren $\mathbf{v} = (1, 1, \ldots, 1)$ en egenvektor for den transponerte matrisen M^T. Hva er den tilhørende egenverdien? Vis også at hvis A og B er stokastiske matriser av samme størrelse, så er produktmatrisen AB stokastisk.