NTNU

Det skapende universitet

Forelesning i Matte 3

Determinanter

H. J. Rivertz
Institutt for matematiske fag

21. februar 2008

Innhold 1. time

1. Determinanter og elementære radoperasjoner

Innhold 1. time

1. Determinanter og elementære radoperasjoner
2. Inverterbarhet og determinanter

NTNU
Det skapende universitet

Innhold 1. time

1. Determinanter og elementære radoperasjoner
2. Inverterbarhet og determinanter
3. Determinanter av matriseprodukter

Innhold 2. time

1. Kramers regel

Innhold 2. time

1. Kramers regel
2. Den adjungerte til en $n \times n$-matrise

NTNU
Det skapende universitet

Innhold 2. time

1. Kramers regel
2. Den adjungerte til en $n \times n$-matrise
3. Formel for inverse til $n \times n$-matrise

NTNU
Det skapende universitet

Determinanter og elementære radoperasjoner

$$
\begin{array}{llcll}
I. & A & \xrightarrow{(1/c)R_i} & B & \Rightarrow & |A| = c|B| \\
II. & A & \xrightarrow{SWAP(R_i,R_j)} & B & \Rightarrow & |A| = -|B| \\
III. & A & \xrightarrow{(c)R_i+R_j} & B & \Rightarrow & |A| = |B|
\end{array}
$$

NTNU
Det skapende universitet

Inverterbarhet og determinanter

Teorem

En $n \times n$ matrise A er inverterbar hvis og bare hvis

$$|A| \neq 0.$$

NTNU
Det skapende universitet

Determinanter av matriseprodukter

Setning

Determinanten til produktet av to matriser er lik produktet av determinantene til hver av dem

$$|A\ B| = |A|\ |B|$$

$$|A\ B\ C| = |A|\ |B|\ |C|$$

NTNU
Det skapende universitet

Kramers regel

Teorem

Et lineært system med invertibel ($n \times n$) koeffisientmatrise:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

har entydig løsning

NTNU
Det skapende universitet

Kramers regel

Teorem

Et lineært system med invertibel ($n \times n$) koeffisientmatrise:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

har entydig løsning

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|},$$

NTNU
Det skapende universitet

Kramers regel

Teorem

Et lineært system med invertibel ($n \times n$) koeffisientmatrise:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

har entydig løsning

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, \ \ldots, x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

Der A_i er matrisen der vi har byttet ut i-te kolonne i A med $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

NTNU

Det skapende universitet

Den adjungerte til en matrise

Definisjon

Den adjungerte til $n \times n$-matrisen A. Er lik

$$adj\,A = [A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

NTNU
Det skapende universitet

Den adjungerte til en matrise

Definisjon

Den adjungerte til $n \times n$-matrisen A. Er lik

$$adj\,A = [A_{ij}]^{T} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Notasjonen $[]^{T}$ betyr transponert, dvs rader blir kolonner og motsatt.

NTNU
Det skapende universitet

Formel for den inverse til en matrise

Teorem

Den inverse av en invertibel matrise A er gitt ved

$$A^{-1} = \frac{\mathit{adj}\, A}{|A|}$$

NTNU
Det skapende universitet

Formel for den inverse til en matrise

Teorem

Den inverse av en invertibel matrise A er gitt ved

$$A^{-1} = \frac{adj\, A}{|A|}$$

Idé for bevis.

Kramers regel og ekspansjon langs i-te kolonne gir

$$x_i = \frac{1}{|A|}(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n).$$

Bruker ogsa at $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. □

NTNU
Det skapende universitet

Eksempel

Finn den inverse til $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$A_{11} =$ $A_{12} =$ $A_{13} =$

$A_{21} =$ $A_{22} =$ $A_{23} =$

$A_{31} =$ $A_{32} =$ $A_{33} =$

,

$$A^{-1} = \frac{1}{\quad} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

NTNU
Det skapende universitet

Eksempel

Finn den inverse til $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$ $\qquad A_{12} =$ $\qquad A_{13} =$

$A_{21} =$ $\qquad A_{22} =$ $\qquad A_{23} =$

$A_{31} =$ $\qquad A_{32} =$ $\qquad A_{33} =$

$$A^{-1} = \frac{1}{} \begin{bmatrix} & 2 & \\ & & \\ & & \end{bmatrix},$$

NTNU

Det skapende universitet

Eksempel

Finn den inverse til $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{13} =$$

$$A_{21} = \qquad A_{22} = \qquad A_{23} =$$

$$A_{31} = \qquad A_{32} = \qquad A_{33} =$$

,

$$A^{-1} = \frac{1}{} \begin{bmatrix} 2 & & \\ -6 & & \\ & & \end{bmatrix}$$

NTNU

Det skapende universitet

Eksempel

Finn den inverse til $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = \qquad A_{22} = \qquad A_{23} =$$

$$A_{31} = \qquad A_{32} = \qquad A_{33} =$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = -12,$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 & & \\ -6 & & \\ 2 & & \end{bmatrix}$$

NTNU
Det skapende universitet

Eksempel

Finn den inverse til $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{22} = \qquad A_{23} =$$

$$A_{31} = \qquad A_{32} = \qquad A_{33} =$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = -12,$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 & -4 & \\ -6 & & \\ 2 & & \end{bmatrix}$$

NTNU
Det skapende universitet

Eksempel

Finn den inverse til $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{23} =$$

$$A_{31} = \qquad A_{32} = \qquad A_{33} =$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = -12,$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 & -4 & \\ -6 & 0 & \\ 2 & & \end{bmatrix}$$

NTNU

Det skapende universitet

Eksempel

Finn den inverse til $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = \qquad A_{32} = \qquad A_{33} =$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = -12,$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 & -4 & \\ -6 & 0 & \\ 2 & 2 & \end{bmatrix}$$

NTNU

Det skapende universitet

Eksempel

Finn den inverse til $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{32} = \qquad A_{33} =$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = -12,$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -6 & 0 & \\ 2 & 2 & \end{bmatrix}$$

NTNU

Det skapende universitet

Eksempel

Finn den inverse til $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{33} =$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = -12,$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -6 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & \end{bmatrix}$$

NTNU
Det skapende universitet

Eksempel

Finn den inverse til $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = -12,$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -6 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & -10 \end{bmatrix}$$

NTNU
Det skapende universitet