NTNU

Det skapende universitet

Forelesning i Matte 3

Vektorrom

H. J. Rivertz
Institutt for matematiske fag

10. mars 2008

Innhold

Definisjon

Et n-vektorrom er mengden av alle (reelle) n-vektorer $(x_1, \ldots, x_n)$.
Dvs n-tupler der $x_1, \ldots, x_n$ er reelle tall.

Notason: $\mathbb{R}^n$

Eksempel

— Mengden av de komplekse tall er et 2-vektorrom

— Mengden av alle 4×1-matriser er et 4-vektorrom

Regneoperasjoner på n-vektorrom

Vi har 2 regneoperasjoner pa $\mathbb{R}^n$:

Addisjon + Hvis $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ og $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ er n-vektorer så er $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ også en n-vektor:

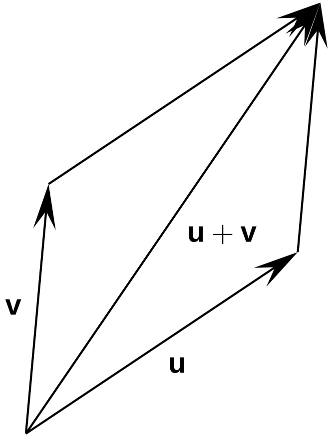
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

Skalarmultippel Hvis $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ er en n-vektor og c er et reelt tall så er $c\mathbf{u}$ også en n-vektor:

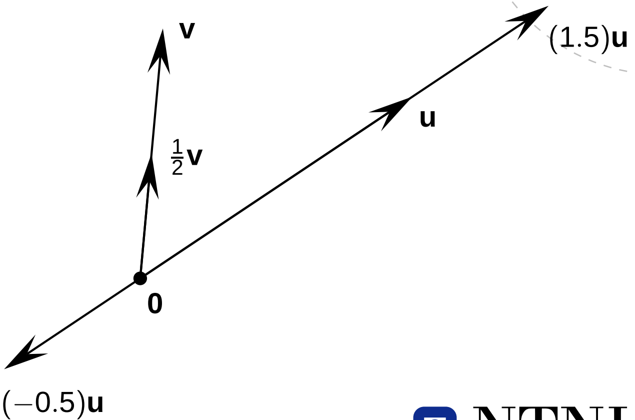
$$c\mathbf{u} = (cu_1, cu_2, \ldots, cu_n)$$

NTNU
Det skapende universitet

Addisjon



Multiplikasjon med skalar



Vektorrom

Definisjon

En mengde V med operasjonene addisjon og skalarmultiplikasjon kalles et **vektorrom** og medlemene kalles **vektorer** hvis for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ og $a, b \in \mathbb{R}$:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
3. Det finnes en $\mathbf{0} \in V$ slik at $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ for alle $\mathbf{u} \in V$
4. Det finnes en $-\mathbf{u} \in V$ slik at $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$
5. $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
6. $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$
7. $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$
8. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

NTNU
Det skapende universitet

Eksempler på vektorrom

- n-vektorrom
- Mengden F av alle reelle funksjoner på tallinjen $\mathbb{R}$.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(af)(x) = a \cdot f(x)$$

- Mengden av alle løsninger av differensiallikningen

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

NTNU
Det skapende universitet

Underrom

Definisjon

En ikketom delmengde W av et vektorrom V er et **underrom** av V hvis W er selv et vektorrom med operasjonene arvet fra V.

Tilstrekkelig betingelse for underrom

Teorem

Et ikketom delmengde W av V er underrom av V hvis og bare hvis

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$ *når* $\mathbf{u} \in W$ *og* $\mathbf{v} \in W$
2. $c\mathbf{u} \in W$ *når* $\mathbf{u} \in W$ *og* $c \in \mathbb{R}$

NTNU
Det skapende universitet

Løsningsrom

Teorem

Om A er en $m \times n$-matrise så er mengden av løsningen av det homogene lineære systemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

et underrom av $\mathbf{R}^n$.

NTNU
Det skapende universitet