Annenordens lineære differensialligninger

Standardform:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

Ligningen er

homogen hvis $r(x) \equiv 0$ og inhomogen ellers.

Fundamentalteoremet for homogene ligninger:

Hvis y_1 og y_2 er to løsninger av

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

og c_1 og c_2 er konstanter, så er også funksjonen $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ en løsning av (1).

Lineært uavhengige funksjoner:

To funksjoner y_1 og y_2 er lineært uavhengige (på et intervall I) hvis hverken y_1 eller y_2 er et konstant multiplum av den andre (på I).

F. eks. er funksjonene $y_1 = e^x$ og $y_2 = xe^x$ lineært uavhengige, mens funksjonene $y_1 = x^2$ og $y_2 = 4x^2$ er lineært avhengige (siden $y_2 = 4y_1$).

Gitt en homogen ligning

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{1}$$

Basis og generell løsning:

To lineært uavhengige løsninger y_1 og y_2 av (1) sies å være en basis for løsningene av (1), og

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

der c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter kalles en generell løsning av (1).

Initialverdiproblem:

Ligningen (1) og to initialbetingelser

$$y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

utgjør et initialverdiproblem. Hvis $y = c_1y_1 + c_2y_2$ er en generell løsning av (1), løser vi initialverdiproblemet ved å bestemme konstantene c_1 og c_2 ved hjelp av initialbetingelsene.

Reduksjon av orden:

Kjenner vi én løsning y_1 av (1), kan vi finne en lineært uavhengig løsning y_2 ved å substituere $y = uy_1$ i (1). Til bestemmelse av u får vi en førsteordens ligning med $v = u'$ som ukjent.