Frie svingninger, masse–fjærsystem

Udempet system: $my'' + ky = 0$

$$y(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = C\cos(\omega_0 t - \delta)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan\delta = \frac{B}{A}$$

harmoniske svingninger med periode $T = 2\pi/\omega_0$
frekvens $\omega_0/2\pi$, amplitude C og fasevinkel δ

Dempet system: $my'' + cy' + ky = 0$

Karakteristisk ligning har røtter

$$(*) \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}.$$

Røttene $(*)$	Betingelse	Dempning
reelle $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$c^2 > 4mk$	overkritisk
dobbelrot $\lambda_1 = \lambda_2$	$c^2 = 4mk$	kritisk
komplekse $\lambda_{1,2}$	$c^2 < 4mk$	underkritisk

Euler–Cauchyligning

Ligningen er

$$x^2y'' + axy' + by = 0 \tag{1}$$

der a og b er konstanter. Innsetting av $y = x^m$ gir hjelpeligningen (auxiliary equation)

$$m^2 + (a-1)m + b = 0. \tag{2}$$

Merk at koeffisienten foran m er $a-1$, ikke a.

Hvis (2) har reelle røtter $m_1 \neq m_2$ så er funksjonene $y_1 = x^{m_1}$ og $y_2 = x^{m_2}$ en basis for (1), og en generell løsning av (1) i dette tilfellet er

$$y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}.$$