Eksistens og entydighet av løsninger

Gitt ligningen

$$(*)\qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

der $p(x)$ og $q(x)$ er kontinuerlige på et intervall I.

Teorem 1 Initialverdiproblemet med $(*)$ og initialbetingelser $y(x_0) = K_0$, $y'(x_0) = K_1$ der x_0 er et punkt i I har entydig (nøyaktig én) løsning.

Definisjon Wronskideterminanten til to funksjoner y_1 og y_2 er definert ved

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'.$$

Teorem 2 La y_1 og y_2 være løsninger av $(*)$.

(1) Hvis y_1 og y_2 er lineært uavhengige på I, så er $W(y_1, y_2) \neq 0$ for alle x i I.

(2) Hvis y_1 og y_2 er lineært avhengige på I, så er $W(y_1, y_2) = 0$ for alle x i I.

Teorem 3 Hvis y_1 og y_2 er lineært uavhengige løsninger av $(*)$ så vil generell løsning

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

omfatte *alle* løsninger av $(*)$.

Inhomogene ligninger

(1) $$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

Den tilhørende homogene ligningen er

(2) $$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Merk:

(a) Summen av en løsning av (1) og en løsning av (2) er en løsning av (1).

(b) Differensen mellom to løsninger av (1) er en løsning av (2).

Generell løsning:

En generell løsning av (1) er en løsning av formen

$$y = y_h + y_p$$

der $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ er en generell løsning av (2), og y_p er en løsning av (1) som ikke inneholder vilkårlige konstanter (en partikulær løsning).

For å løse den inhomogene ligningen (1), må vi altså løse den homogene ligningen (2) og finne én løsning av (1).