Tvungne svingninger, masse–fjærsystem

Udempet system: $my'' + ky = F_0 \cos \omega t$

$\omega \neq \omega_0$ ($\omega_0 = \sqrt{k/m}$, se frie svingninger):

$$y(t) = C \cos(\omega_0 t - \delta) + \frac{F_0}{m({\omega_0}^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

$\omega = \omega_0$ (resonans):

$$y(t) = C \cos(\omega_0 t - \delta) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t$$

Dempet system: $my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t$

Den transiente løsningen (den generelle løsningen av den inhomogene ligningen) er

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Enhver løsning av den homogene ligningen nærmer seg null når $t \to \infty$. Den transiente løsningen nærmer seg følgelig den stasjonære løsningen

$$y_p(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t = C^* \cos(\omega t - \eta).$$

Variasjon av parametre

(1) $$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

La y_1 og y_2 være to lineært uavhengige løsninger av den tilhørende homogene ligningen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

En partikulær løsning (på formen $y_p = uy_1 + vy_2$) av (1) er gitt ved formelen

(*) $$\boxed{y_p = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W}\, dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W}\, dx}$$

der $W = W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ er Wronskide-terminanten til y_1 og y_2.

Som et alternativ til å huske formelen (*) for y_p kan vi huske ligningssystemet

$$\begin{aligned} u'y_1 + v'y_2 &= 0 \\ u'y_1' + v'y_2' &= r \end{aligned}$$

for u' og v'. Vi løser ligningssystemet, finner u og v ved integrasjon og regner ut $y_p = uy_1 + vy_2$.