Inverse matriser

Definisjon: En kvadratisk matrise A er inverterbar hvis det fins en matrise B slik at

$$AB = BA = I$$

der I er identitetsmatrisen.

Merk:

(1) Hvis A er en inverterbar matrise, så fins det nøyaktig én matrise B slik at $AB = BA = I$. Den kalles den inverse til A og betegnes A^{-1}.

(2) Hvis A er inverterbar, så er A^{-1} inverterbar, og $(A^{-1})^{-1} = A$.

(3) Hvis A og B er inverterbare matriser med samme størrelse, så er AB inverterbar og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Teorem: La A være en kvadratisk matrise. Følgende betingelser er ekvivalente:

(1) A er inverterbar.

(2) A er radekvivalent med identitetsmatrisen I.

(3) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har bare den trivielle løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(4) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har entydig løsning for alle $\mathbf{b}$.

(5) Det fins en matrise B slik at $AB = I$.

Hvordan finne inverse matriser?

Inverse 2×2-matriser:

En 2×2-matrise

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

er inverterbar hvis og bare hvis $ad - bc \neq 0$, og da er

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Inverse $n \times n$-matriser:

For å finne den inverse A^{-1} til en $n \times n$-matrise A, omformer vi $n \times 2n$-matrisen $\left[A \,\vdots\, I\right]$ til en redusert echelonmatrise ved hjelp av elementære radoperasjoner. Hvis A er inverterbar, vil den reduserte echelonmatrisen være

$$\left[I \,\vdots\, A^{-1}\right].$$

Fra E&P kapittel 2:

En $n \times n$-matrise A er inverterbar hvis og bare hvis determinanten til A er forskjellig fra null.