Determinanter

Determinanten til en 2×2-matrise $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Determinanten til en 3×3-matrise $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

La $A = [a_{ij}]$ være en $n \times n$-matrise.

Minoren M_{ij} er determinanten til $(n-1) \times (n-1)$-undermatrisen i A som vi får ved å stryke i-te rad og j-te kolonne i A.

Kofaktoren A_{ij} er definert ved $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Determinanten til A er definert ved

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Teorem: Determinanten til en $n \times n$-matrise kan beregnes ved kofaktorutvikling langs enhver rad eller kolonne.

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$
$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

Regneregler for determinanter

(1) Hvis B fås fra A ved å multiplisere én enkelt rad (eller kolonne) i A med en konstant k, så er $\det(B) = k\det(A)$.

(2) Hvis B fås fra A ved å bytte om to rader (eller kolonner) i A, så er $\det(B) = -\det(A)$.

(3) Hvis to rader (eller to kolonner) i A er identiske, så er $\det(A) = 0$.

(4) Hvis matrisene A_1, A_2 og B er identiske bortsett fra i-te rad, og i-te rad i B er summen av i-te rad i A_1 og i-te rad i A_2, så er $\det(B) = \det(A_1) + \det(A_2)$. Tilsvarende for kolonner.

(5) Hvis B fås fra A ved å addere et konstant multiplum av én rad i A til en annen rad i A, så er $\det(B) = \det(A)$. Tilsvarende for kolonner.

(6) Determinanten til en triangulær matrise er lik produktet av diagonalelementene.

(7) $\det(A^T) = \det(A)$

(8) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$