Lineære kombinasjoner og lineær uavhengighet

En vektor $\mathbf{w}$ sies å være en lineær kombinasjon av vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, . . . , $\mathbf{v}_k$ hvis det fins skalarer c_1, c_2, . . . , c_k slik at $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$.

Teorem

Hvis $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, . . . , $\mathbf{v}_k$ er vektorer i et vektorrom V, så er mengden W av *alle* lineærkombinasjoner av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, . . . , $\mathbf{v}_k$ et underrom i V. W er underrommet *utspent* av vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, . . . $\mathbf{v}_k$, $W = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$.

Vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, . . . , $\mathbf{v}_k$ er lineært uavhengige hvis ligningen $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ bare har den trivielle løsningen $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$.

Vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, . . . , $\mathbf{v}_k$ er lineært avhengige hvis det fins skalarer c_1, c_2, . . . , c_k, *ikke alle null*, slik at $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$.

Teorem

I $\mathbb{R}^n$ er n vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, . . . , $\mathbf{v}_n$ lineært uavhengige hvis og bare hvis $n \times n$-matrisen A med kolonnevektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, $A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$, har determinant ulik null, $\det(A) \neq 0$.