

Radrommet, kolonnerommet og nullrommet til en matrise

La A være en $m \times n$ -matrise. Ved Gausseliminasjon kan vi omforme A til en echelonmatrise E (evt. Gauss-Jordan til redusert echelonmatrise).

Radrommet til A

$\text{Row}(A)$ er underrommet i \mathbb{R}^n utspent av radvektorene til A . Ikkenullradene i E er en basis for $\text{Row}(A)$.

Kolonnerommet til A

$\text{Col}(A)$ er underrommet i \mathbb{R}^m utspent av kolonnevektorene til A . Kolonnene i A som svarer til pivotkolonnene i E er en basis for $\text{Col}(A)$.

Nullrommet til A

$\text{Null}(A)$ er løsningsrommet til det homogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ som er ekvivalent med $E\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Hvis systemet har k frie variabler, blir generell løsning på formen $\mathbf{x} = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \cdots + t_k\mathbf{v}_k$. Da er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ en basis for $\text{Null}(A)$.

Dimensjoner

$$\dim \text{Row}(A) = \dim \text{Col}(A) \quad (\text{rangen til } A)$$

$$\text{rang}(A) + \dim \text{Null}(A) = n \quad (A \text{ er } m \times n)$$

Anvendelser

Finne basis

Skal vi finne basis for et underrom $W = \text{span}(S)$ i \mathbb{R}^n , kan vi la vektorene i S være radene i en matrise A og finne basis for $\text{Row}(A)$. Det gir en basis for W siden $W = \text{Row}(A)$.

Alternativt kan vi la vektorene i S være kolonnene i en matrise A og finne basis for $\text{Col}(A)$. Ved å bruke basisalgoritmen for $\text{Col}(A)$, blir denne basisen for $W = \text{Col}(A)$ en delmengde i S .

Inhomogene system

$$(*) \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

er konsistent hvis og bare hvis høyresidevektoren \mathbf{b} er i $\text{Col}(A)$. Hvis \mathbf{x}_0 er én løsning av $(*)$, og $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$ er en basis for $\text{Null}(A)$, så er alle løsningene til $(*)$ på formen

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_h = \mathbf{x}_0 + t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 + \dots + t_k\mathbf{x}_k.$$