Prikkproduktet i $\mathbb{R}^n$

Prikkproduktet (skalarproduktet) av to vektorer $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ og $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ i $\mathbb{R}^n$ er definert ved

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$$

og oppfyller regnereglene

(1) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

(2) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

(3) $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

(4) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$; $\quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Lengden av en vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ i $\mathbb{R}^n$ er definert ved $|\mathbf{u}| = (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)^{1/2}$.

Avstanden mellom to punkter (vektorer) $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ er definert ved $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$.

Cauchy-Schwarz' ulikhet: $\quad |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$

Trekantulikheten: $\quad |\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$

Vinkelen θ mellom to (ikkenull-)vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ er definert som den entydige vinkelen θ i intervallet $[0, \pi]$ som oppfyller $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta$.

Ortogonale vektorer og ortogonale komplementer i $\mathbb{R}^n$

Vektorene $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ er ortogonale hvis $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

For ortogonale vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ gjelder

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 \quad \text{(Pytagoras)}.$$

Teorem

Hvis ikkenull-vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ er innbyrdes ortogonale, så er de lineært uavhengige.

En vektor $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^n$ er ortogonal til et underrom V i $\mathbb{R}^n$ hvis $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ for alle $\mathbf{v}$ i V. Mengden av *alle* vektorer i $\mathbb{R}^n$ som er ortogonale til underrommet V kalles det ortogonale komplementet til V og betegnes $V^\perp$ (leses "V perp").

Merk

(1) $V^\perp$ er et underrom i $\mathbb{R}^n$.

(2) V og $V^\perp$ har bare nullvektoren felles.

(3) $(V^\perp)^\perp = V$

(4) $\dim V + \dim V^\perp = n$

Teorem

La A være en $m\times n$-matrise. Radrommet Row(A) og nullrommet Null(A) er ortogonale komplementer i $\mathbb{R}^n$. Det vil si,

$$\text{hvis } V = \text{Row}(A), \text{ så er } V^\perp = \text{Null}(A).$$