

Ortogonale projeksjoner og minste kvadraters løsning

La V være et underrom i \mathbb{R}^n . Da kan enhver vektor \mathbf{b} i \mathbb{R}^n dekomponeres entydig på formen $\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$ der \mathbf{p} er i V og \mathbf{q} er i V^\perp . Vektoren \mathbf{p} kalles den ortogonale projeksjonen av \mathbf{b} inn i V .

Anta at det inhomogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke har løsning. Da er \mathbf{b} ikke i $\text{Col}(A)$. La \mathbf{p} være den ortogonale projeksjonen av \mathbf{b} inn i $\text{Col}(A)$.

Minste kvadraters løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er vektoren $\bar{\mathbf{x}}$ som gjør kvadratfeilen $E^2 = |A\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}|^2$ minst mulig. Vektoren $\bar{\mathbf{x}}$ oppfyller $A\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{p}$.

For å finne minste kvadraters løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, løser vi det tilhørende normalsystemet

$$A^T A \bar{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}.$$

Hvis $m \times n$ -matrisen A har $\text{rang}(A) = n$, så er $n \times n$ -matrisen $A^T A$ inverterbar slik at normalsystemet har entydig løsning. Løsningen $\bar{\mathbf{x}}$ er minste kvadraters løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.