

Ortogonale basiser og Gram–Schmidts algoritme

En ortogonal basis for et underrom V i \mathbb{R}^n er en basis som består av vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ som er parvis ortogonale, $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ når $i \neq j$.

Hvis, i tillegg, vektorene er enhetsvektorer, dvs. $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1$ for $i = 1, 2, \dots, k$, sies basisen å være en ortonormal basis for V .

Projeksjonsformelen

Anta at vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ danner en *ortogonal* basis for et underrom V i \mathbb{R}^n . Den ortogonale projeksjonen \mathbf{p} av \mathbf{b} inn i V er gitt ved

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 + \dots + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k} \mathbf{v}_k.$$

Gram–Schmidts algoritme

Anta at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ er en basis for et underrom V i \mathbb{R}^n . En ortogonal basis $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ for V får vi ved å bruke følgende algoritme:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_k &= \mathbf{v}_k - \frac{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 - \dots - \frac{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_{k-1}}{\mathbf{u}_{k-1} \cdot \mathbf{u}_{k-1}} \mathbf{u}_{k-1} \end{aligned}$$