

System av differensialligninger

Et første ordens lineært homogent system med konstante koeffisienter og n ukjente funksjoner $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t), \dots, y_n = y_n(t)$ har formen

$$\begin{aligned}y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\&\vdots \\y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n.\end{aligned}$$

På matriseform kan systemet skrives $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ der $A = [a_{ij}]$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\mathbf{y}' = (y_1', y_2', \dots, y_n')$.

Teorem

Hvis $n \times n$ -matrisen A har n lineært uavhengige egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ med egenverdiene $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, så har $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ generell løsning

$$\mathbf{y} = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n.$$

En n -te ordens lineær homogen differensialligning

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

kan omformes til et første ordens system ved å innføre $y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', \dots, y_n = y^{(n-1)}$:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2 \\y_2' &= y_3 \\&\vdots \\y_n' &= -a_0y_1 - a_1y_2 - a_2y_3 - \dots - a_{n-1}y_n.\end{aligned}$$