Ortogonale basiser og Gram-Schmidt

En ortogonal basis for underrommet V av $\mathbb{R}^m$ er en basis av parvis ortogonale vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ (dvs $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ hvis $i \neq j$).

Hvis, i tillegg, vektorene er enhetsvektorer (dvs $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1$, $i = 1, 2, \cdots, n$) så kalles basisen ortonormal.

Projeksjonsformelen

Anta at vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ danner en ortogonal basis for underrommet V. Da er den ortogonale projeksjonen $\mathbf{p}$ av vektoren $\mathbf{b}$ inn i V gitt av

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_n}\mathbf{v}_n.$$

Gram-Schmidt algoritmen

Hvis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ er en basis for underrommet V av $\mathbb{R}^m$, kan vi finne en ortogonal basis $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n$ for V slik:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{v}_{k+1} - \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_{k+1}}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \cdots - \frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_{k+1}}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k}\mathbf{u}_k$$

$$k = 1, 2, \cdots n-1$$