Lineære kombinasjoner

Definisjon: En vektor $\mathbf{w}$ kalles en lineær kombinasjon av vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ dersom det finnes konstanter $c_1, c_2, ..., c_k$ slik at $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_k\mathbf{v}_k$.

Teorem

Dersom $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ er vektorer i et vektorrom V, så er mengden W av alle lineære kombinasjoner et underrom av V.

Vi sier at underrommet W er utspent av vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$, $W = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k\}$.

Lineær uavhengighet

Definisjon: Vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ i et vektorrom V kalles lineært uavhengige dersom ligningen

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_k\mathbf{v}_k = 0$$

kun har triviell løsning.

Vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ er **lineært avhengige** dersom det finnes konstanter $c_1, c_2, ..., c_k$, ikke alle lik null, slik at $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_k\mathbf{v}_k = 0$.

Hvis vi har k vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ i $\mathbf{R}^n$ og

(i) $k > n$ så er vektorene lineært avhengige.

(ii) $k = n$ så er vektorene lineært uavhengige hvis og bare hvis $n \times n$ matrisen $A = [\mathbf{v}_1 \; \mathbf{v}_2 ... \mathbf{v}_n]$ har determinant ulik null.

(iii) $k < n$ så er vektorene lineært uavhengige hvis og bare hvis en $k \times k$ submatrise av $n \times k$ matrisen $A = [\mathbf{v}_1 \; \mathbf{v}_2 ... \mathbf{v}_k]$ har determinant ulik null.