Homogene differensialligninger med konstante koeffisenter

Ligningen

$$y'' + ay' + by = 0,$$

har karakteristisk ligning

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0,$$

med røtter

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 - 4b}\right),$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-a - \sqrt{a^2 - 4b}\right).$$

Det gir tre mulige tilfeller

I	$a^2 - 4b > 0,$	to reelle røtter
II	$a^2 - 4b = 0,$	én reell dobbel rot
III	$a^2 - 4b < 0,$	kompleks konjugerte røtter

Generell løsning

Tilfelle I $\quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

Tilfelle II $\quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$

Tilfelle III $\quad y = e^{-ax/2}(A \cos \omega x + B \sin \omega x),$

I tilfelle III er røttene $\lambda = -\frac{a}{2} \pm i\omega$, hvor $\omega^2 = b - \frac{1}{4}a^2$.

Initialverdiproblem

Gitt initialverdier

$$y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1,$$

bruk disse til å bestemme konstantene c_1 og c_2 (evt. A og B).

Frie svingninger

$$my'' + cy' + ky = 0$$

Uten dempning, $c = 0$

$$my'' + ky = 0$$

Generell løsning (harmonisk svingning)

$$y = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = C\cos(\omega_0 t - \delta)$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m},\ C = \sqrt{A^2 + B^2},\ \delta = \arctan(B/A)$$

Med dempning, $c > 0$

I Overdempning (to reelle røtter)

II Kritisk dempning (1 reell, dobbel rot)

III Underdempning (komplekse røtter)