Euler-Cauchy ligninger

$$x^2y'' + axy' + by = 0$$

Hjelpeligning:

$$m^2 + (a-1)m + b = 0$$

Vi ser kun på tilfellet der vi har to ulike, reelle røtter av hjelpeligningen, da er den generelle løsningen:

$$y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}$$

Annenordens lineære homogene ligninger
Ekstistens og entydighet

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

Anta at koeffisientene $p(x)$ og $q(x)$ er kontinuerlige funksjoner (gjelder i alle teoremene). La I være et åpent interval.

Teorem 1

Ligning (1) med initalbetingelsene $y(x_0) = K_0$ og $y'(x_0) = K_1$, har entydig løsning på I.

Wronskideterminant

Wronski'en til to funksjoner y_1 og y_2 er

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'.$$

Teorem 2

(i) To løsninger av (1), y_1 og y_2, er lineært avhengige på I hvis og bare hvis $W(y_1, y_2)$ er null i et punkt x_0 på I.

(ii) Dersom $W = 0$ i et punkt på I, så er $W \equiv 0$ på I. Motsatt betyr det at dersom det finnes et punkt x_1 hvor $W \neq 0$, så er y_1 og y_2 lineært uavhengige.

Teorem 3

Ligning (1) har en generell løsning.

Teorem 4

Hvis y_1 og y_2 er lineært uavhengige løsninger av (1), så inneholder den generelle løsningen $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ alle mulige løsninger av (1).