System av differensialligninger

Et første ordens lineært homogent system med konstante koeffisienter kan skrives som

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

På matriseform kan vi skrive $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, med $A = [a_{ij}]$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ og $\mathbf{y}' = (y_1', y_2', ..., y_n')$.

Teorem

Hvis $n \times n$ matrisen A har n lineært uavhengige egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ med egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, så har $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ generell løsning

$$\mathbf{y} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + ... + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n.$$

Et system på formen $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}$ kalles inhomogent.

Teorem

En $n$te ordens differensialligning

$$y^{(n)} = F(t, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$$

kan gjøres om til et første ordens system ved å sette

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', ..., y_n = y^{(n-1)}.$$

Systemet blir da formen

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= F(t, y_1, y_2, \cdots y_n). \end{aligned}$$