

Kjeglesnitt og kvadratiske former

Annengradsligning i x og y

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Kvadratisk form:

$$q(\mathbf{x}) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

Teorem

Hvis $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ er en kvadratisk form med en symmetrisk 2×2 matrise A , så fins det en rotasjon slik at

$$q(\mathbf{x}') = \lambda_1(x'_1)^2 + \lambda_2(x'_2)^2.$$

Her er λ_1 og λ_2 egenverdier til A , $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ og P er matrisen som ortogonalt diagonaliserer A .

Teorem

Grafen til enhver annengradsligning i x og y er en av følgende

- (i) Ellipse, hyperbel eller parabel
- (ii) To skjærende linjer (degenert hyperbel)
- (iii) To parallelle linjer (degenert parabel)
- (iv) En linje (degenert parabel)
- (v) Et punkt (degenert ellipse)
- (vi) En tom mengde (imaginær ellipse)