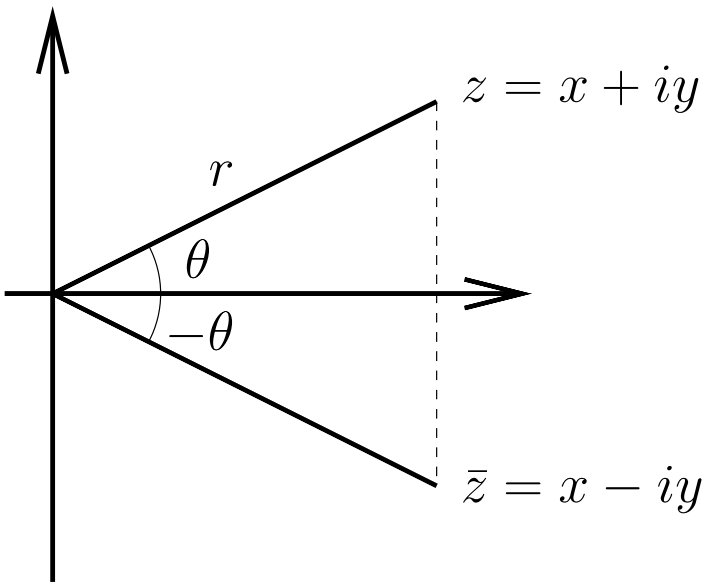
Komplekse tall

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

normalform polarform

Eulers formel $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Det komplekse plan



$$i^2 = -1,$$

$$x = \mathrm{Re}\ z, \quad y = \mathrm{Im}\ z$$

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\theta = \arctan\dfrac{y}{x},$ for z i 1. og 4. kvadrant,

$\theta = \arctan\dfrac{y}{x} + \pi,$ for z i 2. og 3. kvadrant

Kompleks konjugert

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Multiplikasjon og divisjon

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = \cdots$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \cdots$$

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Røtter

Ligningen $w^n = z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ har n løsninger:

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\Big)$$

$$= \sqrt[n]{r} e^{i(\theta + 2k\pi)/n} \quad k = 0, 1, ..., n-1$$

Annenordens lineære differensialligninger

Homogen lign:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (1)$$

Inhomogen lign:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \qquad (2)$$

p, q, r kontinuerlige på I

Generell løsning

Hom lign $\quad y_h = c_1y_1 + c_2y_2 \quad y_1(x), y_2(x)$ basis

Inhom lign $\quad y = y_h + y_p \quad y_p$ partikulær løsn

Gitt inital betingelser $y(x_0) = K_0$ og $y'(x_0) = K_1$ har både (1) og (2) entydig løsning på I.

Homogene diff.lign. med konst. koeff.

$$y'' + ay' + by = 0$$

Karakteristisk ligning $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

(1) to reelle røtter λ_1 og λ_2

$$y = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$$

(2) én reell dobbel rot λ

$$y = c_1e^{\lambda x} + c_2xe^{\lambda x}$$

(3) komplekse røtter $\lambda = -\dfrac{a}{2} \pm i\omega$

$$y = e^{-ax/2}(A\cos\omega x + B\sin\omega x),$$

Euler-Cauchy ligninger

$$x^2y'' + axy' + by = 0$$

Hjelpeligning $m^2 + (a-1)m + b = 0$

Generell løsning $y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}$

Reduksjon av orden

Hvis vi kjenner én løsning, y_1, av (1), kan resten av basisen finnes ved å skrive

$$y = y_2 = uy_1$$

Inhomogene ligninger

Løses ved

- Ubestemte koeffisienters metode
- Variasjon av parametre, sett $y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2$

Frie svingninger

$$my'' + cy' + ky = 0$$

Uten dempning, $c = 0$

$$my'' + ky = 0$$

Generell løsning (harmonisk svingning)

$$y = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = C\cos(\omega_0 t - \delta)$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m},\ C = \sqrt{A^2 + B^2},\ \delta = \arctan(B/A)$$

Med dempning, $c > 0$

I Overdempning (to reelle røtter)

II Kritisk dempning (1 reell, dobbel rot)

III Underdempning (komplekse røtter)

Tvungne svingninger

- med periodisk ytre kraft

$$my'' + cy' + ky = F_0\cos\omega t.$$

Tilfelle I: Udempet svingning, $c = 0$

$\omega \neq \pm\omega_0$

$$y_p(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

og den generelle løsningen $y = y_h + y_p$ er en sum av to harmoniske svingninger.

Resonans

Når $\omega = \pm\omega_0$ må y_p modifiseres

$$y_p(t) = t(a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t)$$

og $y_p \to \infty$ når $t \to \infty$.

Tilfelle II. $c > 0$

Partikulær løsning på formen

$$y_p(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

Den generelle løsningen $y = y_h + y_p$ vil gå mot den stasjonære løsningen y_p når t blir stor nok ($y_h \to 0$ når $t \to \infty$).

Lineære systemer

m ligninger, n ukjente $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$A = [a_{ij}] \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Totalmatrise $[A \;\; \mathbf{b}]$

Elementære radoperasjoner

cR_p, SWAP(R_p, R_q), $(c)R_p + R_q$

Gauss eliminasjon: finner echelonmatrise.

Gauss-Jordan eliminasjon: finner redusert echelonmatrise.

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent (har løsning) hvis echelonmatrisen ikke har en rad $[0 \cdots 0 \vdots d]$ ($d \neq 0$).

Løsningen er entydig (unik) hvis alle ukjente er ledervariabler.

Uendelig mange løsninger hvis minst en ukjent er fri variabel.

Lingingssystem på echelonform løses ved tilbakesubstitusjon.

Matrisemultiplikasjon

- A $m \times p$ matrise
- B $p \times n$ matrise
- AB $m \times n$ matrise
- $AB = [c_{ij}]$, hvor c_{ij} er produktet av rad i og kolonne j,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Inverse ($n \times n$) matriser

- A er inverterbar hvis det fins B slik at $AB = BA = I$, vi sier $B = A^{-1}$.
- $(A^{-1})^{-1} = A$, $(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$.

Finne A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$ NB! $ad - bc \neq 0$.

Hvis A er $n \times n$:

$$[A|I] \xrightarrow[eliminasjon]{Gauss-Jordan} [I|A^{-1}]$$

Følgende er ekvivalent for $n \times n$ matrise A

(1) A er inverterbar

(2) A er radekvivalent med I

(3) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har bare løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

(4) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har entydig løsning for alle $\mathbf{b}$ $(\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b})$

(5) $\det A \neq 0$

Determinanter

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = ad - bc$$

Determinanten til en $n \times n$ matrise finnes ved kofaktorutviklig langs en vilkårlig rad eller kolonne, og forenkles ved elementære rad/kolonneoperasjoner.

$$\begin{aligned} \det A^T &= \det A \\ \det AB &= (\det A)(\det B) \\ \det A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \quad (\det A \neq 0) \\ \det A &= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \quad A \text{ triangulær} \end{aligned}$$

Cramers regel

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, A $n \times n$ matrise med $\det A \neq 0$, har entydig løsning $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ gitt ved

$$x = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ erstatter i-te kolonne i A.

Inverse matriser

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A)}{\det A}$$

adj(A) er den adjugerte matrise, adj$(A) = [A_{ij}]^T$, hvor A_{ij} er ij-te kofaktor i A.