Eksempel: dempet svinging

En jernkule er festet i ei fjær og settes i bevegelse.

- Fjærkonstant: $k = 90$ (N/m)
- Masse: $m = 10$ (kg)
- Dempingskonstant: (a) $c = 100$ (kg/s), (b) $c = 60$ (kg/s) og (c) $c = 10$ (kg/s)
- Initalbetingelser: $y(0) = 0.16$ og $y'(0) = 0$, dvs. kula trekkes 16 cm nedover før den slippes, og utgangshastigheten er null.

(a) Overdempet svinging

Her er $c = 100$, så $c^2 - 4km = 100^2 - 4 \cdot 90 \cdot 10 = 6400 > 0$. Karakterisktisk ligning:

$$10\lambda^2 + 100\lambda + 90 = 10 \cdot (\lambda + 9)(\lambda + 1) = 0,$$

gir basis e^{-9t} og e^{-t} og den generelle løsningen blir

$$y = c_1 e^{-9t} + c_2 e^{-t}.$$

Ved hjelp av initalbetingelsene finner vi $c_1 = -0.02$ og $c_2 = 0.18$.

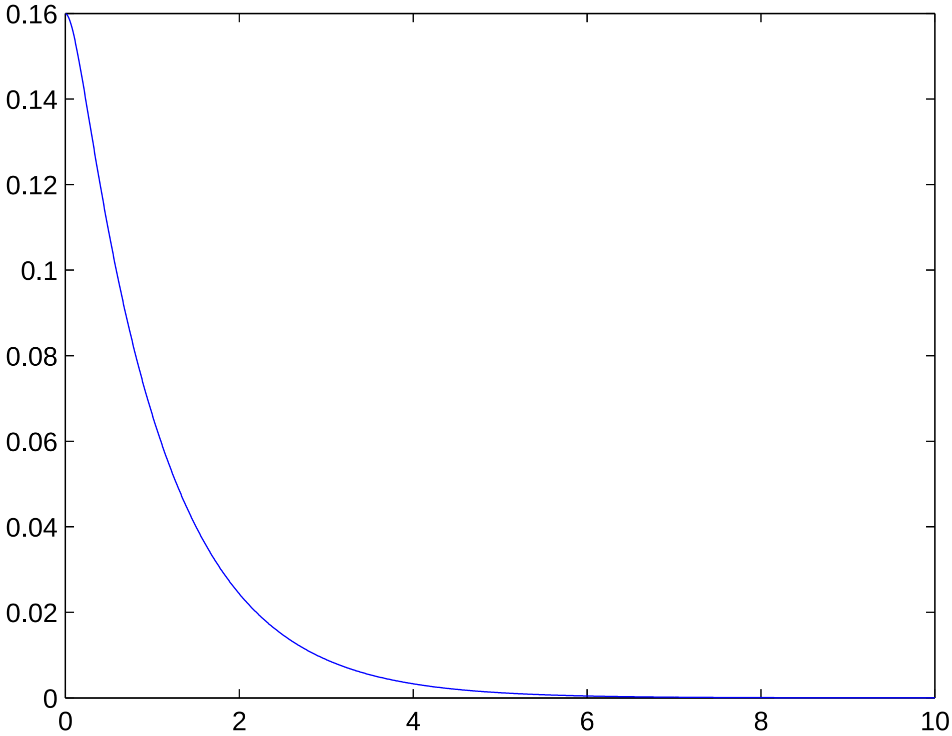

Figure 1: Figuren viser $y(t) = -0.02e^{-9t} + 0.18e^{-t}$. Dette er et eksempel på overdempet svinging og vi ser at svingingen dør fort ut, altså kula kommer raskt til ro.

(b) Kritisk demping

Her er $c = 60$, så $c^2 - 4km = 60^2 - 4 \cdot 90 \cdot 10 = 0$. Karakterisktisk ligning:

$$10\lambda^2 + 60\lambda + 90 = 10 \cdot (\lambda + 3)^2 = 0,$$

gir basis e^{-3t} og te^{-3t}, og den generelle løsningen blir

$$y = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t}$$

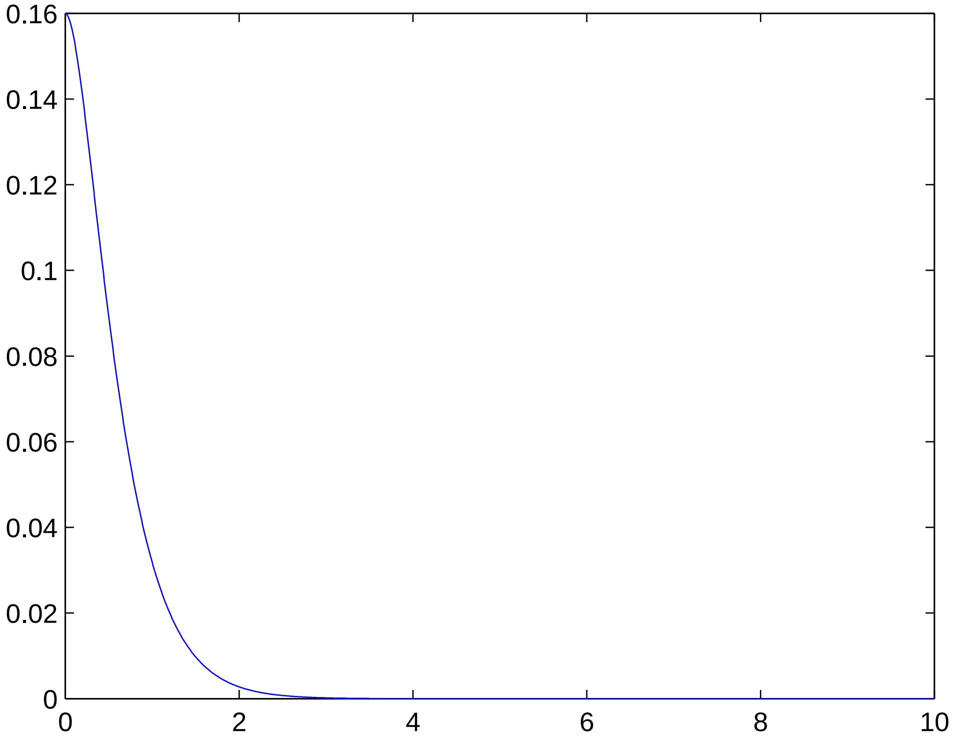

Figure 2: Her ser vi $y(t) = 0.16e^{-3t} + 0.48te^{-3t}$, altså er bevegelsen kristisk dempet. Legg merke til at siden begge konstantene er positive (de har samme fortegn), så krysses ikke t-aksen.

Ved hjelp av initalbetingelsene finner vi $c_1 = 0.16$ og $c_2 = 0.48$.

(c) Underdempet svinging

Tilslutt er $c = 10$, så $c^2 - 4km = 10^2 - 4 \cdot 90 \cdot 10 = -3500 < 0$. Karakterisktisk ligning:

$$10\lambda^2 + 10\lambda + 90 = 0,$$

og røttene blir

$$\lambda = -0.5 \pm 2.96i.$$

Basisen blir da $e^{-0.5t} \cos 2.96t$ og $e^{-0.5t} \sin 2.96t$ og den generelle løsningen blir

$$y = e^{-0.5t}\big(A \cos 2.96t + B \sin 2.96t\big)$$

Ved hjelp av initalbetingelsene finner vi $A = 0.16$ og $B = 0.027$.

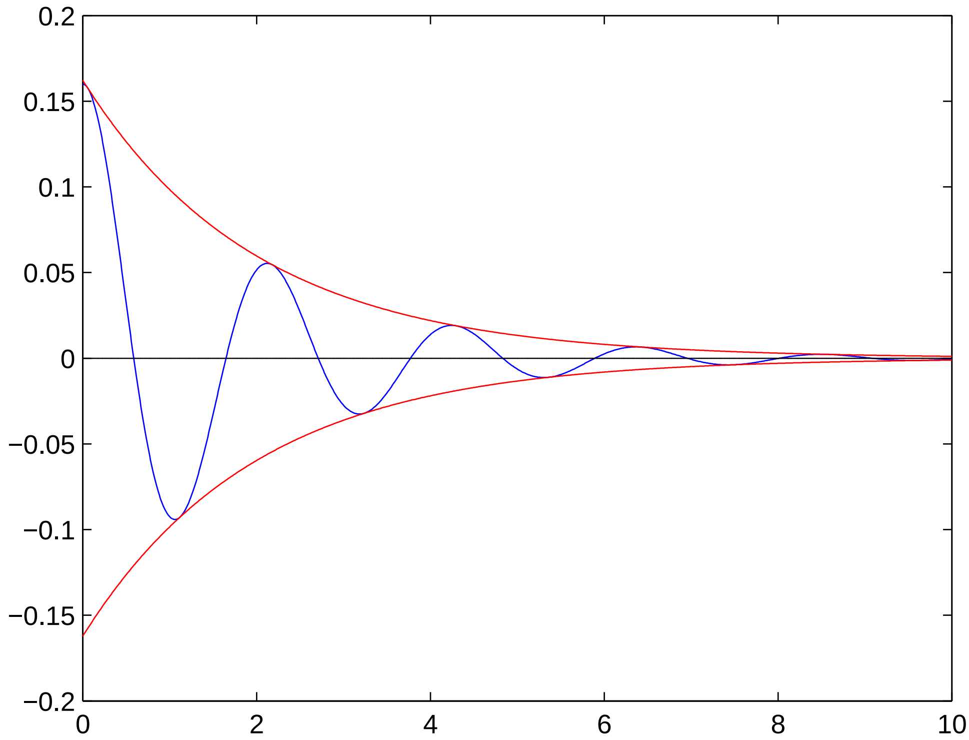

Figure 3: Figuren viser $y(t) = e^{-0.5t}(0.16 \cos 2.96t + 0.027 \sin 2.96t)$, underdempet svinging. Vi ser at kulen svinger opp og ned mange ganger før den tilslutt kommer til ro. Legg merke til at svingingen akkurat passer mellom $Ce^{-0.5t}$ og $-Ce^{-0.5t}$, hvor $C = \sqrt{A^2 + B^2} = 0.16$ (se formel (4*), s 63 i Kreyszig).

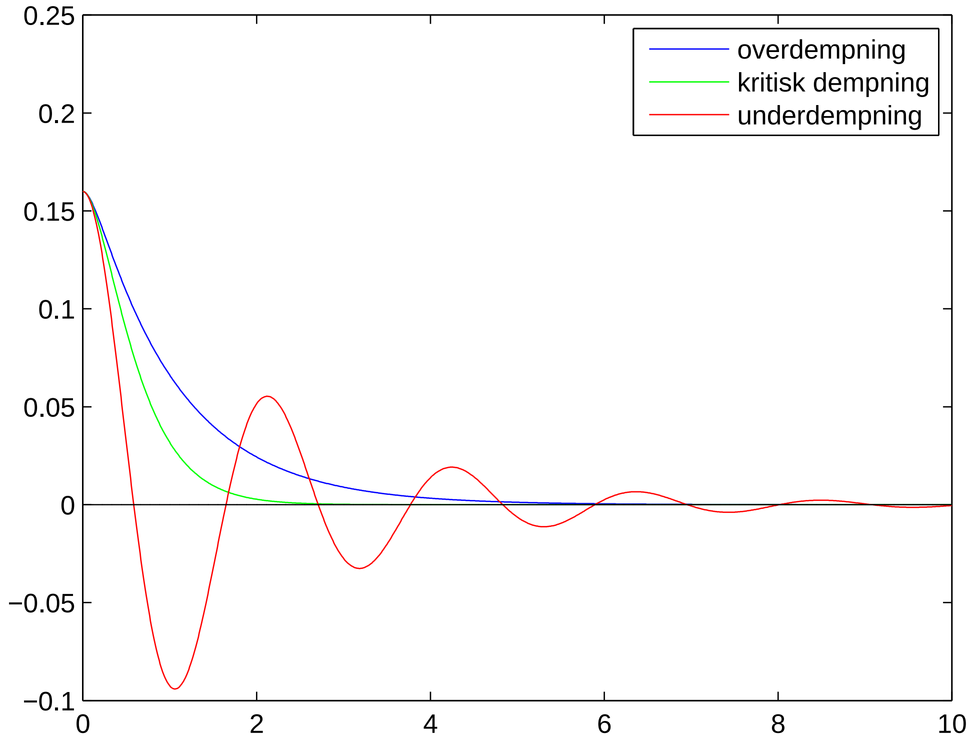

Figure 4: Her ser vi de tre tilfellene samlet i en figur.