TMA4115 Matematikk 3
eksamen 12. august 2009

Løsningsforslag

1 Vi skriver høyresiden på polarform, det vil si

$$-1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

Dersom $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, blir

$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$$

og vi får at z tilfredstiller ligningen hvis og bare hvis

$$r^4 = 2 \qquad \text{og} \qquad 4\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

eller

$$r = \sqrt[4]{2} \qquad \text{og} \qquad \theta = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$$

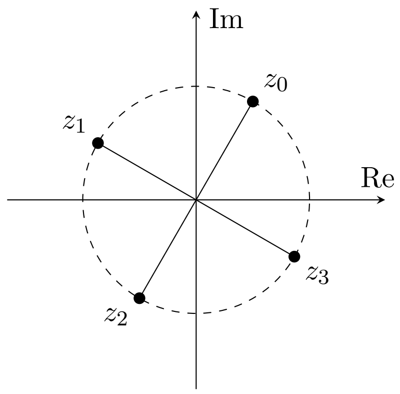
for $k \in \{0,1,2,3\}$. Så løsningene blir

$$z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right).$$



2 **a)** Karakteristisk ligning er

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0,$$

med løsninger $\lambda = -1 \pm 2i$. Dermed blir generell løsning

$$y(x) = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

med $A, B \in \mathbb{R}$. Initialbetingelsene gir $A = 1$ og $B = -1$, det vil si at initialverdiproblemet har løsning

$$y(x) = e^{-x}(\cos 2x - \sin 2x).$$

b) Vi forsøker ubestemte koeffisienters metode med

$$y_p(x) = Ae^{-x} + Be^{-3x}.$$

Innsetting av dette i den opprinnelige ligningen gir $A = \frac{1}{2}$ og $B = -\frac{3}{8}$, det vil si

$$y_p(x) = \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{3}{8}e^{-3x}.$$

Generell løsning blir derfor

$$y(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{2} + A\cos 2x + B\sin 2x\right) - \frac{3}{8}e^{-3x}.$$

$\boxed{3}$ Den tilhørende homogene ligningen

$$y'' - \frac{3}{x}y' - \frac{5}{x^2}y = 0 \tag{1}$$

har løsninger på formen $y(x) = x^m$. Innsetting gir

$$m(m-1) - 3m - 5 = 0,$$

det vil si $m = -1$ eller $m = 5$. Så generell løsning av (1) er

$$y(x) = Ax^{-1} + Bx^5, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

For å finne en partikulær løsning av

$$y'' - \frac{3}{x}y' - \frac{5}{x^2}y = x^3, \tag{2}$$

bruker vi variasjon av parametere. Det vil si, vi forsøker å finne løsninger y_p på formen

$$y_p(x) = u(x)x^{-1} + v(x)x^5,$$

for ukjente funksjoner u og v. Dermed blir

$$y_p'(x) = u'(x)x^{-1} + v'(x)x^5 - u(x)x^{-2} + 5v(x)x^4.$$

Vi velger $u(x)$ og $v(x)$ slik at

$$u'(x)x^{-1} + v'(x)x^5 = 0. \tag{3}$$

Da blir

$$y_p'(x) = -u(x)x^{-2} + 5v(x)x^4$$

og

$$y_p''(x) = -u'(x)x^{-2} + 5v'(x)x^4 + 2u(x)x^{-3} + 20v(x)x^3.$$

Innsatt i (2) får vi

$$-u'(x)x^{-2} + 5v'(x)x^4 = x^3. \tag{4}$$

Ligning (3) og (4) gir

$$u'(x) = -\frac{1}{6}x^5 \qquad \text{og} \qquad v'(x) = \frac{1}{6}x^{-1}.$$

Vi integrerer og får

$$u(x) = -\frac{1}{36}x^6 + A \qquad \text{og} \qquad v(x) = \frac{1}{6}\ln x + B.$$

Så generell løsning av (2) blir

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(-\frac{1}{36}x^6 + A\right)x^{-1} + \left(\frac{1}{6}\ln x + B\right)x^5 \\ &= Ax^{-1} + Cx^5 + \frac{1}{6}x^5 \ln x, \end{aligned}$$

der A og $C = B - \frac{1}{36}$ er vilkårlige konstanter.

Formelen fra boka

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W}\,\mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1 r}{W}\,\mathrm{d}x$$

gir samme svar.

$\boxed{4}$ **a)** Elementære radoperasjoner gir at den utvidede koeffiesientmatrisen

$$[A\,|\,\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & b & 4 \end{array}\right]$$

er radekvivalent med

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & b & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & b & 4 \\ 0 & 0 & 1-ab & 0 & 1-4a \\ 0 & 0 & 0 & 1-ab & 1-4a \end{array}\right].$$

Så hvis

- $ab \neq 1$, har vi nøyaktig èn løsning,
- $ab = 1$ og $1 - 4a \neq 0$, har vi ingen løsninger,
- $ab = 1$ og $1 - 4a = 0$, har vi uendelig mange løsninger.

Det vil si, for $a = \frac{1}{4}$ og $b = 4$ har systemet uendelig mange løsninger. I så fall får vi matrisen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

og tilbakesubstitusjon gir

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 + 4s \\ x_2 &= 4 \qquad + 4t \\ x_3 &= \qquad s \\ x_4 &= \qquad\qquad t. \end{aligned}$$

b) Fra punkt a) vet vi at A er radekvivalent med

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1-ab & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-ab \end{bmatrix}.$$

Utfra dette er det lett å se at dersom $ab \neq 1$ er $\operatorname{rang} A = 4$, og dersom $ab = 1$ er $\operatorname{rang} A = 2$. Ettersom A er inverterbar hvis og bare hvis $\operatorname{rang} A = 4$, ser vi at A er inverterbar når $ab \neq 1$.

c) Matrisen A er symmetrisk og derfor diagonaliserbar. For $a = b = 1$ er det karakteristiske polynomet $P_A(\lambda)$ gitt ved

$$
\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\
&= \lambda^2(\lambda-2)^2 = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2.
\end{aligned}
$$

5 **a)** Det karakteristiske polynomet for matrisen er gitt ved

$$
\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} 7-\lambda & 0 & 3 \\ -10 & 9-\lambda & -5 \\ -6 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} \\
&= (9-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-4),
\end{aligned}
$$

så egenverdiene blir $\{1, 4, 9\}$. Litt regning gir at

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ er en egenvektor for } \lambda = 1, \\
\mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ er en egenvektor for } \lambda = 4, \text{ og} \\
\mathbf{v}_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ er en egenvektor for } \lambda = 9.
\end{aligned}
$$

Så med

$$
P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}
$$

er $A = PDP^{-1}$.

b) Vi har

$$
\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) = PDP^{-1}\mathbf{y}(t).
$$

Dersom $\mathbf{z}(t) = P^{-1}\mathbf{y}(t)$ har vi

$$
\mathbf{z}'(t) = P^{-1}\mathbf{y}'(t) = D\mathbf{z}(t),
$$

det vil si følgende system av ukoblede differensialligninger

$$
\begin{aligned}
z_1'(t) &= z_1(t) \\
z_2'(t) &= 4z_2(t) \\
z_3'(t) &= 9z_3(t)
\end{aligned}
$$

som har generell løsning

$$
\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{t} \\ c_2 e^{4t} \\ c_3 e^{9t} \end{bmatrix}
$$

der c_1, c_2 og c_3 er vilkårlige konstanter. Det gir at

$$\mathbf{y}(t) = P\mathbf{z}(t) = P \begin{bmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{4t} \\ c_3 e^{9t} \end{bmatrix} = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{9t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

er den generelle løsning av systemet. Initialbetingelsene gir at $c_1 = -1, c_2 = -2$ og $c_3 = -4$, så løsningen blir $y_1(t) = -e^t + 2e^{4t}$, $y_2(t) = 2e^{4t} - 4e^{9t}$ og $y_3(t) = 2e^t - 2e^{4t}$.

6

a) Vi har at $\det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)^2$, så A er inverterbar $\iff \det A \neq 0 \iff \det(A^T A) \neq 0 \iff A^T A$ er inverterbar.

b) Den ene inklusjonen er opplagt; dersom $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er også $A^T A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, så $\operatorname{Null} A \subseteq \operatorname{Null} A^T A$. For den omvendte inklusjonen, anta at $A^T A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dermed er

$$0 = (A^T A\mathbf{x})^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T (A\mathbf{x}) = \|Ax\|^2$$

Dermed er $A\mathbf{x} = 0$, og vi har $\operatorname{Null} A^T A \subseteq \operatorname{Null} A$. Altså er $\operatorname{Null} A^T A = \operatorname{Null} A$.