Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Magnus Landstad

Eksamen i TMA4110/TMA4115 Matematikk 3

Bokmål
12. august 2009
Tid: 09:00 - 13:00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (Hewlett Packard HP30S eller Citizen SR-270X)
Rottmann: *Matematiske formelsamling*

Alle svar skal begrunnes og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1 Finn alle løsningene til ligningen

$$z^4 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Tegn løsningene i det komplekse plan.

Oppgave 2

a) Løs initialverdiproblemet

$$y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -3.$$

b) Finn generell løsning til

$$y'' + 2y' + 5y = 2e^{-x} - 3e^{-3x}.$$

Oppgave 3 Finn generell løsning til

$$y'' - \frac{3}{x}y' - \frac{5}{x^2}y = x^3, \quad x > 0.$$

Oppgave 4 La a og b være reelle tall og la A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

a) La

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Bestem for hvilke verdier av a og b systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger og angi da løsningsmengden til systemet på parameterform.

b) Drøft hvordan rangen til A varierer med a og b. Avgjør når A er inverterbar.

c) Begrunn hvorfor A er diagonaliserbar for alle verdier av a og b. Beregn det karakteristiske polynomet til A når $a = b = 1$.

Oppgave 5

a) Vis at matrisen A, gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 3 \\ -10 & 9 & -5 \\ -6 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

har egenverdier $1, 4$ og 9. Finn en inverterbar matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

b) Løs differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= 7y_1 + 3y_3 \\ y_2' &= -10y_1 + 9y_2 - 5y_3 \\ y_3' &= -6y_1 - 2y_3 \end{aligned}$$

med initialbetingelse $y_1(0) = 1, y_2(0) = -2, y_3(0) = 0$.

Oppgave 6 Vis følgende.

(i) La A være en kvadratisk matrise, og A^T den transponerte matrisen. Da er A inverterbar hvis og bare hvis $A^T A$ er inverterbar.

(ii) La A være en $m \times n$-matrise. Vis at $\mathrm{Null}(A^T A) = \mathrm{Null}\, A$.