TMA4115 Matematikk 3

Semesterprøve mandag 2. mars 2009

Løsningsforslag

Oppgave 1 $\mathrm{Im}(2e^{i\frac{\pi}{3}})$ er lik

A: $i\sqrt{3}$ **B:** 1 $\boxed{\textbf{C: } \sqrt{3}}$ **D:** $-2i$

Løsning: Ettersom $2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$ er $\mathrm{Im}(2e^{i\frac{\pi}{3}}) = \sqrt{3}$ (alternativ **C**).

Oppgave 2 Hvor mange løsninger ($z \neq 0$) har ligningen $z^3 = \bar{z}$?

A: Tre $\boxed{\textbf{B: } \text{Fire}}$ **C:** To **D:** Én

Løsning: Ligningen $z^3 = \bar{z}$ kan skrives på formen $r^3e^{i\theta} = re^{-i\theta}$. Ganger vi begge sider med $e^{i\theta}$ får vi $r^3e^{i4\theta} = r$. Ettersom vi er bedt om å finne løsninger z der $z \neq 0$ kan vi forkorte med r, altså $e^{i4\theta} = 1$. Dette gir $4\theta = 2\pi k$, altså $\theta = \frac{1}{2}\pi k$ hvor $k = 0, 1, 2, 3$. Dette sier oss at $z^3 = \bar{z}$ har fire løsninger (alternativ **B**). De fire løsningene er $1, i, -1$ og $-i$.

Oppgave 3 For hvilke verdier av k vil alle løsningene til $y'' + 2y' + ky = 0$ være funksjoner med uendelig mange nullpunkter?

$\boxed{\textbf{A: } k > 1}$ **B:** $k \neq 1$ **C:** $k = 1$ **D:** $k < 1$

Løsning: For at alle løsningene til $y'' + 2y' + ky = 0$ skal ha uendelig mange nullpunkter må det karakteristiske polynomet $\lambda^2 + 2\lambda + k = 0$ ha komplekse røtter (dette gir cosinus- og sinusledd). Løser så det karakteristiske polynomet $\lambda^2 + 2\lambda + k = 0$ og får at $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{1-k}$. Det vil si at hvis $k > 1$ (alternativ **A**) har det karakteristiske polynomet komplekse røtter, og dermed har alle løsningene til $y'' + 2y' + ky = 0$ uendelig mange nullpunkter.

Oppgave 4 Hvilket par av funksjoner er en basis av løsninger for differensialligningen $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$, $-1 < x < 1$?

A: $y_1 = x, y_2 = 1$ **B:** $y_1 = x, y_2 = x^2$ $\boxed{\textbf{C: } y_1 = x, y_2 = x^2 + 1}$ **D:** $y_1 = x, y_2 = 2x$

Løsning: Vi løser ved innsetting. Setter vi inn $y_1 = x$ får vi $(1-x^2)\cdot 0 + 2x\cdot 1 - 2x = 0$. Altså er $y_1 = x$ en basisløsning. Setter vi inn $y_2 = x^2+1$ får vi $(1-x^2)\cdot 2 + 2x\cdot 2x - 2(x^2+1) = 0$.

Altså er $y_2 = x^2 + 1$ en basisløsning. Med andre ord har $(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$, $-1 < x < 1$ basisløsninger $y_1 = x$, $y_2 = x^2 + 1$ (alternativ **C**).

Oppgave 5 Hva blir $y(2)$ for løsningen av initialverdiproblemet $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$, $x > 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 4$?

A: $y(2) = 64$ **B:** $y(2) = 24$ $\boxed{\textbf{C:}\ y(2) = 0}$ **D:** $y(2) = -64$

Løsning: Den homogene differensialligningen $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$, $x > 0$ har hjelpeligning (hvor vi har satt inn for $y = x^m$) $m^2 - 7m + 12 = 0$. Altså er den generelle løsningen gitt ved $y(x) = Ax^3 + Bx^4$. Ved å benytte at $y(1) = 2$ og $y'(1) = 4$ får vi to ligninger for A og B:

$$\begin{aligned} A + B &= 2 \\ 3A + 4B &= 4. \end{aligned}$$

Løser vi disse finner vi at $A = 4$ og $B = -2$. Det gir at $y(x) = 4x^3 - 2x^4$ så $y(2) = 4 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^4 = 0$ (alternativ **C**).

Oppgave 6 Gitt differensialligningen $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x} + xe^{-3x}$. Hvilken form skal vi velge for $y_p(x)$ i ubestemte koeffisienters metode?

A: $Axe^{-2x} + Bxe^{-3x}$ **B:** $Ae^{-2x} + (Bx^2 + Cx + D)e^{-3x}$

$\boxed{\textbf{C:}\ Axe^{-2x} + (Bx + C)e^{-3x}}$ **D:** $Ae^{-2x} + (Bx + C)e^{-3x}$

Løsning: Vi finner først den homogene løsningen til den inhomogene differensialligningen $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x} + xe^{-3x}$. Denne differensialligningen har karakteristisk polynom $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$. Altså er den homogene løsningen på formen $y_h(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$ der C_1 og C_2 er konstanter. Ubestemte koeffisienters metode gir da at partikulærløsningen er på formen $y_p(x) = Axe^{-2x} + (Bx + C)e^{-3x}$ (alternativ **C**).

Oppgave 7 Finn partikulærløsningen til den inhomogene differensialligningen

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}.$$

$\boxed{\textbf{A:}\ y_p(x) = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \ln|\sin 2x|}$ **B:** $y_p(x) = 2x\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x \ln|\sin 2x|$

C: $y_p(x) = \frac{1}{4}x^2\cos 2x + 2\sin 2x \ln|\sin 2x|$ **D:** $y_p(x) = \frac{1}{2}x\cos 4x - \frac{1}{4}\sin 4x \ln|\sin 2x|$

Løsning: Den inhomogene differensialligningen $y''+4y = \frac{1}{\sin 2x}$ har karakteristisk polynom $\lambda^2 + 4 = 0$ med røtter $\lambda = \pm 2i$. Altså har den homogene løsningen basisløsninger $y_1(x) = \cos 2x$ og $y_2(x) = \sin 2x$. Metoden med variasjon av parametre sier så at

$$y_p(x) = y_1(x)u(x) + y_2(x)v(x)$$

der

$$u(x) = \int -\frac{y_2 r}{W}\mathrm{d}x, \quad v(x) = \int \frac{y_1 r}{W}\mathrm{d}x, \quad \text{og } W = W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2' y_1.$$

Regner vi ut Wronskideterminanten finner vi at $W = 2\cos 2x \cos 2x - (-2)\sin 2x \sin 2x = 2(\cos^2 2x + \sin^2 2x) = 2$. Dette gir at

$$\begin{aligned} u(x) &= \int -\frac{y_2 r}{W}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x \\ v(x) &= \int \frac{y_1 r}{W}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\cos 2x}{\sin 2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln|\sin 2x|, \end{aligned}$$

som igjen gir

$$y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x) = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \ln|\sin 2x| \quad (\text{alternativ } \mathbf{A}).$$

Oppgave 8 For hvilken verdi av a har ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= 2 \\ y + z &= 1 \\ x - z &= a \end{aligned}$$

uendelige mange løsninger?

A: Ingen a **B:** $a = 0$ **C:** $a = -2$ $\boxed{\textbf{D:}\ a = 4}$

Løsning: Totalmatrisen til ligningssystemet er

$$\left[A \mid \mathbf{b}\right] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{array}\right].$$

Gausseliminasjon anvendt på $\left[A \mid \mathbf{b}\right]$ gir:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_2+R_3} \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & a-2 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_1+R_3} \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{array}\right].$$

Altså har ligningssystemet *uendelig mange* løsninger når $a = 4$ (alternativ **D**).

Oppgave 9 Hva er redusert echelonform (trappeform) for matrisen

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}?$$

A: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\boxed{\textbf{B:} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}}$ **C:** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **D:** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 19/5 \end{bmatrix}$

Løsning: Gauss–Jordaneliminasjon på den gitte matrisen gir:

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{4}{5}R_1+R_3} \begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -9/5 & 0 & 9/5 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{2}{5}R_1+R_2} \begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 27/5 & -1 & 8/5 \\ 0 & -9/5 & 0 & 9/5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{5}{9}R_3} \begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 27/5 & -1 & 8/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{27}{5}R_3+R_2} \begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_2} \begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{SWAP}(R_2,R_3)} \begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{6R_2+R_1} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{(alternativ } \mathbf{B}\text{)}.$$

Oppgave 10 Gitt at $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ og $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, regn ut B^{-1}.

$\boxed{\textbf{A:} \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 41 & 12 \end{bmatrix}}$ **B:** $\begin{bmatrix} -8 & -11 \\ 26 & 33 \end{bmatrix}$ **C:** $\begin{bmatrix} 10 & -13 \\ -16 & 23 \end{bmatrix}$ **D:** $\begin{bmatrix} -4 & -10 \\ 17 & 37 \end{bmatrix}$

Løsning: Vi har at $B^{-1} = B^{-1}A^{-1}A = (AB)^{-1}A$ slik at

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 41 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{(alternativ } \mathbf{A}\text{)}.$$