

Potenser av komplekse tall



- La $z = re^{i\theta}$ være et komplekst tall på polarform.
- Da er $z^n = r^n e^{i(n\theta)}$ for alle naturlige tall n .

Eksempel

La $z = -1 + i$. Hva er z^{20} ?

Skriver z på polarform: $z = \sqrt{2}e^{i(3\pi/4)}$. Får:

$$z^{20} = \sqrt{2}^{20} e^{i(3\pi/4) \cdot 20} = 1024 e^{i \cdot 15\pi} = 1024 e^{i\pi} = -1024$$

Røtter av komplekse tall



Gitt komplekstall w og naturlig tall n , vil finne z slik at

$$z^n = w$$

For å løse likningen:

- Skriv w på polarform: $w = re^{i\theta}$
- Da er $z = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\theta/n)}$ en løsning

Flere muligheter for θ (kan alltid legge til 2π) gir flere løsninger.

Røtter av komplekse tall

Gitt komplekst tall $w \neq 0$ og naturlig tall n . Likningen

$$z^n = w$$

har n forskjellige løsninger:

$$z = \sqrt[n]{|w|} \cdot e^{i(\text{Arg } w + 2\pi k)/n} \quad \text{for } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Bruker løsningen med $k = 0$ som definisjon av n -teroten:

Definisjon

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|} e^{i(\text{Arg } w)/n}$$

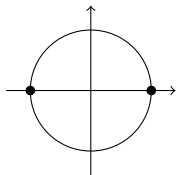
Eksempler: $\sqrt{-1} = i$, $\sqrt[3]{8e^{i(3\pi/4)}} = 2e^{i\pi/4}$

(Merk: Boken definerer $\sqrt[n]{w}$ til å bety *alle* løsningene av $z^n = w$.)

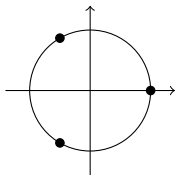


Definisjon

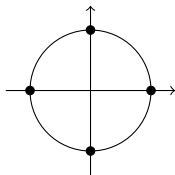
En løsning av likningen $z^n = 1$ kalles en *n-te enhetsrot*.



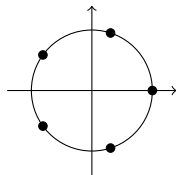
$$z^2 = 1$$



$$z^3 = 1$$



$$z^4 = 1$$



$$z^5 = 1$$

Andregradslikninger



Gitt komplekse tall a , b og c , vil finne komplekst tall z slik at

$$az^2 + bz + c = 0$$

Kan bruke den vanlige formelen:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Algebraens fundamentalteorem



For ethvert polynom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ finnes et komplekst tall z slik at $P(z) = 0$.

Ferdig med komplekse tall



- Nå er vi ferdige med delen om komplekse tall i faget
- Har gått gjennom hele utdraget av Saff–Snider: *Fundamentals of Complex Analysis Engineering, Science and Mathematics*
- Neste forelesning: Differensiallikninger