Produkt av matrise og vektor

Produktet av en $m \times n$-matrise og en vektor i $\mathbb{R}^n$ er definert slik:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n \end{bmatrix}$$

Hvis $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ er kolonnene i matrisen, kan produktet også beskrives slik:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \cdots + v_n\mathbf{a}_n$$

Produkt av matrise og vektor: Eksempler

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 7 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 7 + 5 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 11 \\ 4 \cdot (-2) + 0 \cdot 11 \\ (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Regneregler for produkt av matrise og vektor

$$A \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$$

$$A \cdot (c\mathbf{u}) = c \cdot (A\mathbf{u})$$

Ulike måter å skrive likningssystem på

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Likningssystem

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

Vektorlikning

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Matriselikning

Eksempel: Likningssystem skrevet på ulike måter

Likningssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 7 \\ -2x_1 + 5x_2 &= 4 \\ -5x_1 + 6x_2 &= -3 \end{aligned}$$

Vektorlikning:

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Matriselikning:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Når finnes det løsninger?

Teorem

La A være en $m \times n$-matrise. Følgende påstander er ekvivalente:

1. *Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er løsbar for alle vektorer $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.*
2. *Hver $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ er en lineærkombinasjon av kolonnene i A.*
3. *Mengden utspent av kolonnene i A er hele $\mathbb{R}^m$.*
4. *Gausseliminering av A gir ingen nullrader.*

Homogene systemer

- Et likningssystem er *homogent* hvis alle likningene har 0 på høyresiden, altså hvis det kan skrives som en matriselikning på formen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Et homogent likningssystem har alltid minst én løsning: den *trivielle* løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- En løsning $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ kalles *ikketriviell*.
- Systemet har ikketrivielle løsninger hvis og bare hvis vi får minst én fri variabel når vi løser det.

Ikkehomogene systemer

Anta at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsning $\mathbf{x} = \mathbf{p}$. Da er enhver løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ på formen

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h,$$

der $\mathbf{v}_h$ er en løsning av det homogene systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Dagens pensum

- **1.4** *The Matrix Equation* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, s. 51–56
- **1.5** *Solution Sets of Linear Systems*, s. 59–63
- **1.6** *Applications of Linear Systems*, s. 66–70
  (ikke gjennomgått, les selv)