

Lineær uavhengighet



Definisjon

Vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ i \mathbb{R}^m er *lineært uavhengige* hvis likningen

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

ikke har noen andre løsninger enn den trivielle løsningen

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Ellers kalles de *lineært avhengige*.


Lineær uafhængighed for kolonnene i en matrise



La A være en matrise. Følgende påstander er ekvivalente:

- Kolonnene i A er lineært uafhængige.
- Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har kun den trivielle løsningen.
- Vi får ingen frie variabler når vi løser $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Når vi gausseliminerer A , får vi et lederelement i hver kolonne.

Generell fremgangsmåte for å sjekke lineær uavhengighet



Gitt vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ i \mathbb{R}^m . For å sjekke om de er lineært uavhengige:

- Lag en matrise $A = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n]$ med disse vektorene som kolonner.
- Gausseliminer A til trappeform.
- Hvis hver kolonne inneholder et lederelement, er vektorene lineært uavhengige. Ellers er de lineært avhengige.

Lineær uavhengighet: Oppgave 1

Er disse vektorene lineært uavhengige?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 31 \\ 12 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Lineær uavhengighet: Oppgave 1

Er disse vektorene lineært uavhengige?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 31 \\ 12 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 9 & 7 & 31 \\ 3 & 2 & 12 \\ 3 & 4 & 22 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lineær uavhengighet: Oppgave 1

Er disse vektorene lineært uavhengige?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 31 \\ 12 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 9 & 7 & 31 \\ 3 & 2 & 12 \\ 3 & 4 & 22 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det er lederelementer i alle kolonner. Dermed er \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 og \mathbf{v}_3 lineært uavhengige.

Lineær uavhengighet: Oppgave 2

Er disse vektorene lineært uavhengige?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Lineær uavhengighet: Oppgave 2

Er disse vektorene lineært uavhengige?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 10 & 7 & 6 \\ 5 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lineær uavhengighet: Oppgave 2

Er disse vektorene lineært uavhengige?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 10 & 7 & 6 \\ 5 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Siste kolonne har ikke noe lederelement. Dermed er \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 og \mathbf{v}_3 lineært avhengige.

Lineær uavhengighet for to vektorer



- To vektorer \mathbf{v}_1 og \mathbf{v}_2 er lineært uavhengige hvis og bare hvis ingen av dem er lik en skalar ganger den andre.
- Med andre ord: De er lineært uavhengige hvis de ikke ligger på en rett linje gjennom origo.
- For to vektorer i \mathbb{R}^2 er det to muligheter: Enten er de lineært avhengige, eller så utspenner de hele \mathbb{R}^2 .

Når er vektorer lineært avhengige?



- Hvis en av vektorene er en lineærkombinasjon av de andre, så er de lineært avhengige.
- Hvis en av vektorene er $\mathbf{0}$, så er de lineært avhengige.
- Hvis vi har n vektorer i \mathbb{R}^m , der $n > m$, så er de lineært avhengige.

n vektorer i \mathbb{R}^n



Anta at vi har n vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ i \mathbb{R}^n . Da er de lineært uavhengige hvis og bare hvis de utspenner hele \mathbb{R}^n , altså hvis og bare hvis

$$\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} = \mathbb{R}^n.$$

Lineærtransformasjoner



Definisjon

En funksjon $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ er en *lineærtransformasjon* hvis

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ for alle \mathbf{u} og \mathbf{v} i \mathbb{R}^n .
2. $T(c \cdot \mathbf{u}) = c \cdot T(\mathbf{u})$ for alle \mathbf{u} i \mathbb{R}^n og c i \mathbb{R} .

Dagens pensum



- **1.7** *Linear Independence*, s. 72–77
- **1.8** *Introduction to Linear Transformations*, s. 79–85