Lineærtransformasjoner

Definisjon

En funksjon $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en *lineærtransformasjon* hvis

1. $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ for alle $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$.
2. $T(c \cdot \mathbf{u}) = c \cdot T(\mathbf{u})$ for alle $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^n$ og c i $\mathbb{R}$.

Lineærtransformasjoner gitt ved matriser

La A være en $m \times n$-matrise, og definer en funksjon $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ved

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Da er T en lineærtransformasjon.

Eksempel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}, \text{ definerer } T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \text{ ved } T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

La $\mathbf{u} = (2, -1)$. Da er

$$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Identitetsmatriser

Identitetsmatrisen I_n er $n \times n$-matrisen med 1-ere langs diagonalen og 0 ellers:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Kolonnene i I_n er lineært uavhengige og utspenner $\mathbb{R}^n$.

Matrisen til en lineærtransformasjon

Teorem

La $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineærtransformasjon. Da finnes det en matrise A slik at

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \text{for alle } \mathbf{x} \text{ i } \mathbb{R}^n.$$

Matrisen A er entydig bestemt av T, og er gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix},$$

der $\mathbf{e}_j$ er j-te kolonne i identitetsmatrisen I_n.

Definisjon

Matrisen A i teoremet kalles *standardmatrisen* til T.

På og en-til-en

Definisjon

La $f : A \to B$ være en funksjon. Vi sier at f er

- *på* hvis det for hver $b \in B$ finnes en $a \in A$ slik at $f(a) = b$,
- *en-til-en* hvis det for hver $b \in B$ er maksimalt én $a \in A$ slik at $f(a) = b$.

Teorem

La $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineærtransformasjon med standardmatrise A.

1. *T er på hvis og bare hvis kolonnene i A utspenner $\mathbb{R}^m$.*
2. *T er en-til-en hvis og bare hvis kolonnene i A er lineært uavhengige.*

Dagens pensum

- **1.8** *Introduction to Linear Transformations*, s. 79–85
- **1.9** *The Matrix of a Linear Transformation*, s. 87–94