Projeksjon på underrom

Teorem

La W være et underrom av $\mathbb{R}^n$, og la $\mathbf{y}$ være en vektor i $\mathbb{R}^n$. Da kan $\mathbf{y}$ dekomponeres til en sum

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$$

der $\hat{\mathbf{y}}$ er i W og $\mathbf{z}$ er i $W^{\perp}$, på en entydig måte.

Hvis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ er en ortogonal basis for W, så er

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \bullet \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{y} \bullet \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \ldots + \frac{\mathbf{y} \bullet \mathbf{u}_n}{\mathbf{u}_n \bullet \mathbf{u}_n}\mathbf{u}_n$$

Vektoren $\hat{\mathbf{y}}$ kalles den **ortogonale projeksjonen** av $\mathbf{y}$ på W, og vi skriver $\hat{\mathbf{y}} = \mathrm{proj}_W\, \mathbf{y}$.

Projeksjon på underrom

Teorem

La W være et underrom av $\mathbb{R}^n$, og la $\mathbf{y}$ være en vektor i $\mathbb{R}^n$. Da er $\hat{\mathbf{y}} = \mathrm{proj}_W \mathbf{y}$ den vektoren i W som er nærmest $\mathbf{y}$. Altså:

$$\mathrm{dist}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}) < \mathrm{dist}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) \quad \textit{for alle } \mathbf{v} \neq \hat{\mathbf{y}} \textit{ i } W.$$

Gram–Schmidt-ortogonalisering

- Gitt et underrom W av $\mathbb{R}^n$ med basis $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p\}$.
- Vi kan finne ortogonal basis for W med **Gram–Schmidt-ortogonalisering**.
- Idé: Gjør hver vektor ortogonal til de foregående.
- $\mathbf{x}_1$ får være som den er: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$.
- Gjør $\mathbf{x}_2$ ortogonal til $\mathbf{v}_1$ ved å sette $\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \bullet \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1$.
- Gjør $\mathbf{x}_3$ ortogonal til $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ ved å sette $\mathbf{v}_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{\mathbf{x}_3 \bullet \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{x}_3 \bullet \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2$.
- …og så videre.

Gram–Schmidt-ortogonalisering

Teorem

La W være et underrom av $\mathbb{R}^n$ med basis $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p\}$. La

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{x}_1 \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \bullet \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 \\
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{x}_3 - \frac{\mathbf{x}_3 \bullet \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{x}_3 \bullet \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 \\
&\vdots \\
\mathbf{v}_p &= \mathbf{x}_p - \frac{\mathbf{x}_p \bullet \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{x}_p \bullet \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{\mathbf{x}_p \bullet \mathbf{v}_{p-1}}{\mathbf{v}_{p-1} \bullet \mathbf{v}_{p-1}}\mathbf{v}_{p-1}
\end{aligned}
$$

Da er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ en ortogonal basis for W.

Dessuten er $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} = \mathrm{Span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$ *for alle k.*

QR-faktorisering

Teorem

La A være en $m \times n$-matrise med lineært uavhengige kolonner. Da kan A faktoriseres til $A = QR$, der Q er en $m \times n$-matrise og R en $n \times n$-matrise, slik at:

1. *Kolonnene i Q utgjør en ortonormal basis for A.*
2. *R er triangulær og inverterbar, og har positive tall på diagonalen.*

Dagens pensum

— **Lay 6.3** *Orthogonal Projections*, s. 365–369

— **Lay 6.4** *The Gram–Schmidt Process*, s. 372–376